ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA I

28 febbraio 2017

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Considerare un sistema di due particelle in tre dimensioni la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} - \frac{e^2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} + \frac{1}{2}m_1\omega^2\vec{x}_1^2 + \frac{1}{2}\frac{m_2^2}{m_1}\omega^2\vec{x}_2^2 + m_2\omega^2\vec{x}_1\cdot\vec{x}_2 \tag{1}$$

dove $\vec{x}_i$, $\vec{p}_i$ sono rispettivamente gli operatori posizione e impulso delle due particelle ed m_i le loro masse.

(1) Separare il moto del baricentro dal moto relativo e determinare l'energia dello stato fondamentale del sistema.

(2) Supporre che la particella di massa m_1 abbia spin $\frac{1}{2}$ e quella di massa m_2 sia priva di spin. Determinare lo spettro della hamiltoniana

$$H_1 = H_r + \lambda\vec{J}\cdot\vec{S}, \tag{2}$$

dove H_r è la hamiltoniana del moto relativo della domanda precedente, $\vec{S}$ è lo spin totale, e $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, dove $\vec{L}$ è il momento angolare del moto relativo. Specificamente, indicare su che base la hamiltoniana H_1 è diagonale, da quali numeri quantici dipendono i suoi autovalori, e quali sono i possibili valori di questi numeri quantici.

(3) *Domanda di teoria:* Data una hamiltoniana della forma $H = H_0 + \epsilon H'$, supponendo noto e non-degenere lo spettro di H_0, determinare la correzione agli autostati di H_0 al primo ordine perturbativo in ϵ.

(4) Determinare nello stato fondamentale della hamiltoniana Eq. (1) il valore della distanza fra le due particelle per cui la densità di probabilità di posizione $\rho(\vec{x}_1,\vec{x}_2)d^3x_1d^3x_2$ è massima.
Suggerimenti: Scegliere opportunamente le coordinate, osservando che la distanza fra le due particelle è pari al modulo della coordinata relativa. Ricordare il valore del raggio di Bohr $a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}$.

(5) Indicando con $|lm\rangle$ un autostato di L^2 ed L_z, dimostrare che gli elementi di matrice dell'operatore posizione lungo l'asse z soddisfano le seguenti identità

$$\langle l'm'|z|lm\rangle = \delta_{mm'}\langle l'm|z|lm\rangle \tag{3}$$

$$(-1)^{l+l'}\langle l'm'|z|lm\rangle = \langle l'm'|-z|lm\rangle. \tag{4}$$

(6) Considerare la hamiltoniana

$$H_2 = H_r + Dz, \tag{5}$$

dove H_r è la hamiltoniana relativa della domanda (2), D è una costante reale positiva e z è l'operatore posizione lungo l'asse z. Sfruttando le identità Eq. (3-4) determinare al primo ordine la perturbazione all'energia del primo stato eccitato della hamiltoniana H_r dovuta al termine proporzionale a D.
Suggerimento: Ricordare l'elemento di matrice $\langle 200|z|210\rangle = -3a_0$.

(7) Nelle condizioni della domanda (6), determinare il valor medio dell'operatore $\vec{x}$ nello stato fondamentale della hamiltoniana H_2 al primo ordine perturbativo non-banale (cioè il più basso ordine al quale si trova un risultato diverso da zero). Esprimere il risultato in termini di valori medi dell'operatore dato negli autostati idrogenoidi.