ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA

25 febbraio 2019

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Si consideri una particella in tre dimensioni la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m}\left[\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{p}-\vec{A}(\vec{x})\right)\right]^2, \tag{1}$$

dove $\vec{\sigma}$ sono le matrici di Pauli, $\vec{x}$ e $\vec{p}$ sono gli operatori (vettoriali) posizione e impulso, e $\vec{A}(\vec{x})$ è un vettore di funzioni degli operatori posizione.

(1) Determinare, usando la rappresentazione di Heisenberg $\vec{v} \equiv \frac{d}{dt}\vec{x}$ (operatore velocità).

(2) Calcolare il commutatore $[v^i, v^j]$, esprimendo il risultato in termini di

$$\partial_i A_j(\vec{x}) - \partial_j A_i(\vec{x}) \equiv \epsilon^{ijk} B^k \tag{2}$$

Suggerimento: usare l'identità soddisfatta dalle matrici di Pauli

$$\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}. \tag{3}$$

(3) Determinare le equazioni del moto alla Heisenberg per gli operatori $\vec{p}$.

(4) Supporre che $\vec{A}(\vec{x})$ sia dato

$$\vec{A}(\vec{x}) = B\begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

dove B è una costante reale positiva, e x_i è la componente dell'operatore $\vec{x}$ lungo l'i–esimo asse cartesiano. Dimostrare che gli autovalori di p_2 e p_3 sono costanti del moto.

(5) *Domanda di teoria:* Dimostrare che $\vec{s} = \frac{hbar}{2}\vec{\sigma}$ sono operatori di spin $\frac{1}{2}$, cioè dimostrare che sono operatori di spin e che il valore dello spin corrispondente è proprio $\frac{1}{2}$.

(6) Dimostrare che la hamiltoniana H Eq. (1) con $\vec{A}$ dato dalla Eq. (4) può essere separata nella somma di una hamiltoniana spaziale ed una hamiltoniana di spin fra loro commutanti.
Suggerimento: usare l'identità soddisfatta dalle matrici di Pauli

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma^k \tag{5}$$

(7) Determinare lo spettro e la degenerazione della hamiltoniana unidimensionale

$$H_1 \equiv \langle k_2 k_3|H|k_2 k_3\rangle, \tag{6}$$

dove H è la hamiltoniana Eq. (1) con $\vec{A}$ dato dalla Eq. (4), separata al punto precedente, e dove $|k_2k_3\rangle$ è un autostato simultaneo di p_2 e p_3.

(8) Sfruttando il risultato della domanda precedente, determinare spettro e degenerazione della hamiltoniana H Eq. (1), sempre con $\vec{A}$ dato dalla Eq. (4). Le autofunzioni nella base delle coordinate sono normalizzabili?

(9) Considerare il caso in cui vi è anche un campo elettrico, ossia la hamiltoniana è data da

$$H_E = H - Ex_1, \tag{7}$$

dove H è data dalla Eq. (1), E è una costante reale positiva ed x_1 è sempre l'operatore posizione lungo il primo asse cartesiano. Determinare lo spettro dell'hamiltoniana H_E trattando il termine proporzionale ad E come una perturbazione, ed usando la teoria perturbativa al primo ordine. Determinare quindi lo spettro dell'hamiltoniana H in modo esatto, e confrontare con il risultato perturbativo al primo ordine.

(10) Dimostrare che data un'autofunzione $\psi(\vec{x})$ della hamiltoniana Eq. (1) nella base delle coordinate la funzione

$$\psi'(\vec{x}) = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\Lambda(\vec{x})\right]\psi(\vec{x}) \tag{8}$$

è un'autofunzione associata al medesimo autovalore di energia di una hamiltoniana sempre della forma della Eq. (1), ma con un nuovo $\vec{A}'(\vec{x})$ e determinare la relazione fra $\vec{A}(\vec{x})$ e $\vec{A}'(\vec{x})$.