ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA I

24 giugno 2015

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Si consideri una particella in campo elettromagnetico in tre dimensioni: la dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 \qquad (1),$$

$\vec{v}$ è l'operatore (vettoriale) definito da

$$\vec{v} = \frac{1}{m} \left(\vec{p} - \vec{A}(\vec{x}) \right), \qquad (2)$$

essendo a loro volta $\vec{x}$ e $\vec{p}$ gli operatori (vettoriali) posizione e impulso, e $\vec{A}(\vec{x})$ un vettore di funzioni degli operatori posizione.

(1) Determinare il commutatore $[v_i, v_j]$ ed utilizzare il risultato per scrivere le equazioni del moto alla Heisenberg per l'operatore $\vec{v}$.

(2) Supporre che $\vec{A}(\vec{x})$ sia dato

$$\vec{A}(\vec{x}) = B \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

dove B è una costante reale positiva, e x_i è la componente dell'operatore $\vec{x}$ lungo l'i–esimo asse cartesiano. Detta p_i la componente dell'operatore $\vec{p}$ lungo l'i–esimo asse cartesiano, dimostrare che gli operatori p_2 e p_3 commutano con l'hamiltoniana. Determinare quindi le autofunzioni nella base delle coordinate

$$\psi_{k_2}(x_2) = \langle x_2 | k_2 \rangle; \;\; \psi_{k_3}(x_3) = \langle x_3 | k_3 \rangle \qquad (3)$$

e gli autovalori degli operatori p_2 e p_3 e scrivere l'hamiltoniana unidimensionale

$$H_1 = \langle k_2 k_3 | H | k_2 k_3 \rangle \qquad (4)$$

(3) Sfruttando il risultato della domanda precedente, determinare lo spettro e la degenerazione dell'hamiltoniana H Eq. (1) con $\vec{A}$ dato dalla Eq. (2). Le autofunzioni nella base delle coordinate sono normalizzabili?

(4) Considerare il caso in cui vi è anche un campo elettrico, ossia la hamiltoniana è data da

$$H_E = H - E x_1, \qquad (5)$$

dove H è data dalla Eq. (1), E è una costante reale positiva ed x_1 è sempre l'operatore posizione lungo il primo asse cartesiano. Determinare lo spettro dell'hamiltoniana H_E trattando il termine proporzionale ad E come una perturbazione, ed usando la teoria perturbativa al primo ordine. Determinare quindi lo spettro dell'hamiltoniana H in modo esatto, e confrontare con il risultato perturbativo al primo ordine.

(5) Considerare ora il caso in cui la particella ha spin $\frac{1}{2}$, e l'hamiltoniana quindi è data da

$$H_s = H - \mu \vec{B} \cdot \vec{\sigma}, \tag{5}$$

dove σ_i sono le matrici di Pauli, μ è una costante reale, e

$$B^i = \epsilon ijk \partial_j A_k(\vec{x}), \tag{6}$$

dove $\vec{A}(\vec{x})$ è la stesso operatore che compare nella Eq. (2). Supporre che $\vec{A}(\vec{x})$ sia dato dalla Eq. (2) e determinare lo spettro dell'hamiltoniana Eq. (5). Supporre che il sistema si trovi nello stato fondamentale, e che al tempo $t = 0$ venga eseguita una prima misura di spin lungo l'asse x_1, e poi al tempo t una seconda misura di spin sempre lungo l'asse x_1. Determinare la probabilità che la prima misura riveli il sistema in uno stato di spin su, e la probabilità che entrambe le misure rivelino il sistema in uno stato di spin su,

(6) Dimostrare che l'hamiltoniana H_s Eq. (5) può essere scritta nella forma

$$H_s = \frac{1}{2m} \left[\vec{\sigma} \cdot \left(\vec{p} - \vec{A}(\vec{x}) \right) \right]^2 \tag{7}$$

e utilizzare il risultato per dimostrare che la proiezione dello spin lungo la direzione di $\vec{v}$ (definito dalla Eq. (2)) è una costante del moto.