ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA

27 giugno 2017

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Considerare un sistema di due particelle in una dimensione aventi la stessa massa m la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H = \frac{P^2}{4m} + \frac{p^2}{m} + \frac{1}{2}m\omega^2\left(2X^2 + \frac{1}{2}x^2\right) \tag{1}$$

dove $x = x_1 - x_2$ e $X = \frac{x_1+x_2}{2}$ sono rispettivamente la coordinata relativa e baricentrale delle due particelle, e p e P i corrispondenti impulsi.

(1) Dimostrare che la hamiltoniana Eq. (1) è separabile nella somma di due hamiltoniane $H = H_1 + H_2$, dove H_1 dipende solo da x_1, p_1 e H_2 solo da x_2, p_2.

(2) Determinare la funzione d'onda di stato fondamentale $\psi_0(x_1, x_2)$ (non è necessario scrivere la normalizzazione) e lo spettro e la degenerazione per la hamiltoniana data, supponendo che le due particelle non abbiano spin e non siano identiche. Determinare inoltre la relazione che vi è, per un generico autostato della hamiltoniana, tra $\psi(x_1, x_2)$ e $\psi(-x_1, -x_2)$. Determinare inoltre come si trasformano la coordinata del baricentro e quella relativa sotto la trasformazione $x_1 \to -x_1$, $x_2 \to -x_2$.

(3) *Domanda di teoria:* Sia dato un sistema di due corpi in una dimensione aventi variabili canoniche x_i, p_i con $i = 1, 2$ che soddisfano relazioni di commutazione canoniche $[p_i, x_j] = -i\hbar\delta_{ij}$. Considerare una trasformazione lineare di coordinate $x'_i = \sum_{j=1}^{2} M_{ij}x_j$. Determinare gli impulsi canonici p'_i corrispondenti alle coordinate x'_i.

(4) Considerare ora il caso in cui la dinamica del sistema è descritta da una hamiltoniana avente le stesso termine cinetico di quella della domanda (1), ma con un potenziale dato da

$$V(x_1, x_2) = \begin{cases} \infty & \text{se } x_1 < 0 \text{ oppure } x_2 < 0 \\ \frac{1}{2}m\omega^2\left(x_1^2 + x_2^2\right) & \text{se } x_1 > 0 \text{ e } x_2 > 0 \end{cases}. \tag{2}$$

Determinare lo spettro dell'hamiltoniana supponendo che le due particelle abbiano spin $\frac{1}{2}$ e siano identiche. Determinare inoltre la degenerazione ed il valore dello spin totale per lo stato fondamentale ed i primi due stati eccitati e scriverne esplicitamente i ket di stato in termini di stati di oscillatore armonico relativi alle due particelle e di stati di spin $|ss_z\rangle$.

(5) Supporre ora che la hamiltoniana sia data dalla somma della hamiltoniana della domanda (4) e di un termine

$$H_s = -B\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2, \tag{3}$$

dove $\vec{s}_i$ sono gli operatori di spin delle due particelle (identiche e di spin $\frac{1}{2}$). Determinare l'energia dello stato fondamentale e dei primi due stati eccitati sia nel caso $\hbar B \gg \omega$ che nel caso $\hbar B \ll \omega$.

(6) Supporre ora che la hamiltoniana sia data dalla somma della hamiltoniana della domanda (4) (quindi con il potenziale Eq. (2), ma senza il potenziale di spin Eq.(3)) e di un termine

$$V(t) = g\exp - \left[t\lambda\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x_1 - \frac{ip_1}{m\omega}\right)\right]. \tag{4}$$

Determinare la probabilità che il sistema preparato al tempo $t = 0$ nello stato fondamentale determinato nella domanda (4) subisca dopo un tempo t una transizione al primo stato eccitato determinato nella stessa domanda, usando la teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo al primo ordine in g. Non è necessario eseguire esplicitamente l'integrale su t.
Suggerimento: ricordare che $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$.

(7) Determinare la degenerazione dello spettro della domanda (4) per un livello energetico qualunque.