ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA

17 giugno 2019

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Considerare un sistema di due particelle in tre dimensioni aventi carica elettrica opposta e, che interagiscono fra di loro con un potenziale coulombiano e soggette ad un campo elettrico costante $\vec{E}$. La hamiltoniana del sistema è

$$H = \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m_2} - \frac{e^2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} + e\vec{E}\cdot\vec{x}_1 - e\vec{E}\cdot\vec{x}_2, \tag{1}$$

dove $\vec{x}_i$, $\vec{p}_i$ sono rispettivamente gli operatori posizione e impulso delle due particelle ed m_i le loro masse.

(1) Separare la hamiltoniana nella somma di una hamiltoniana baricentrale ed una hamiltoniana relativa.

(2) Determinare l'energia e la degenerazione dello stato fondamentale e del primo stato eccitato e la funzione d'onda dello stato fondamentale del sistema nel caso in cui $\vec{E} = 0$.

(3) Calcolare i valori medi della separazione $|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|$ e dell'energia potenziale coulombiana $V_c = -\frac{e^2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}$ nello stato fondamentale del sistema nel caso in cui $\vec{E} = 0$.

(4) Calcolare per quale valore della separazione fra le due particelle è massima la distribuzione di probabilità per misure di posizione, quando il sistema è nello stato fondamentale con $\vec{E} = 0$.

(5) Trattare come perturbazione il termine proporzionale al campo elettrico nella hamiltoniana Eq. (1)

$$V_E = e\vec{E}\cdot(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)\,, \tag{2}$$

e determinare la correzione al primo ordine all'energia dello stato fondamentale del sistema imperturbato dovuta a questo termine.

(6) *Domanda di teoria:* Dimostrare che la dipendenza degli autovalori di energia per un potenziale idrogenoide dai valori della massa e della carica elettrica e dalla costante di Planck è interamente fissata dall'analisi dimensionale, e determinare questa dipendenza.

(7) Scegliere il campo elettrico lungo l'asse z. Calcolare il commutatore $[L_z, V_E]$, dove V_E è il potenziale elettrico Eq. (2) e L_z è l'operatore terza componente del momento angolare relativo. Utilizzare il risultato per dimostrare che $V_{n\ell m,\, n'\ell' m'}$ è diverso da zero solo se $m = m'$, dove

$$V_{n\ell m,\, n'\ell' m'} = \langle n\ell m|V_E|n'\ell' m'\rangle, \tag{3}$$

è l'elemento di matrice di questo potenziale fra due autostati qualunque $|n\ell m\rangle$ della hamiltoniana relativa.

(8) Determinare l'effetto di una trasformazione di parità sul potenziale V_E Eq. (2) ed utilizzare il risultato per determinare per quali valori di ℓ, ℓ' l'elemento di matrice $V_{n\ell m,\, n'\ell' m'}$ Eq. (3) è diverso da zero.

(9) Determinare la correzione dovuta al potenziale V_E al primo livello eccitato della hamiltoniana relativa.
Suggerimento: Per stati idrogenoidi si $\langle 200|z|210\rangle = -3a_0$, dove a_0 è il raggio di Bohr e z è la terza componente dell'operatore coordinata.

(10) Dimostrare che lo stato $z|000\rangle$ è autostato di L^2 e determinare l'autovalore associato.