ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA I

16 luglio 2015

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti.

Considerare un sistema formato da due particelle di uguale massa m in tre dimensioni, la cui dinamica è descritta dall'hamiltoniana

$$H_0 = \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} + V(\vec{x}_1) + V(\vec{x}_2) \tag{1}$$

dove $\vec{x}_i$, $\vec{p}_i$ sono rispettivamente gli operatori posizione e impulso per le due particelle ed il potenziale $V(\vec{x}_i)$ ha la forma

$$V(x_i) = \begin{cases} 0 \text{ se } |x_i^{(j)}| \leq L \\ \infty \text{ se } |x_i^{(j)}| > L \end{cases}, \tag{2}$$

dove $|x_i^{(j)}|$ è la j-esima componente dell'operatore posizione per la i-esima particella, e L è una costante reale e positiva.

(1) Si determinino la funzione d'onda, l'autovalore dell'energia e la degenerazione per lo stato fondamentale e per il primo stato eccitato supponendo che le particelle non siano identiche e siano prive di spin.

(2) Si risponda nuovamente alla domanda precedente, supponendo ora che le particelle siano identiche.

(3) Si supponga ora che le particelle siano dotate di spin e l'hamiltoniana sia data da

$$H_1 = H_0 + H_s, \tag{3}$$

con H_0 dato dalla Eq. (1) e

$$H_s = \lambda \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2, \tag{4}$$

dove s_i sono gli operatori di spin per le due particelle e λ è una costante reale positiva. Nell'ipotesi che la separazione dei livelli dovuta al termine di spin sia più piccola di quella dei livelli dell'hamiltoniana H_0, si determinino lo spettro della hamiltoniana H Eq. (3) e la sua degenerazione, supponendo le due particelle non identiche e (a) entrambe di spin $\frac{1}{2}$ oppure (b) la prima particella di spin $\frac{1}{2}$ e la seconda di spin uno.

(4) Si supponga ora che sul sistema descritto dall'hamiltoniana H_0 Eq. (1) agisca una perturbazione dipendente dal tempo descritta dal potenziale

$$V'(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t) = e^{-\frac{t}{T}} \vec{E} \cdot (\vec{x}_1 + \vec{x}_2), \tag{5}$$

dove T è una costante reale positiva e $\vec{E}$ è un vettore tridimensionale a componenti reali. Si determini, usando la teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo al primo ordine, la probabilità che il sistema preparato in un qualunque autostato dell'hamiltoniana H_0, quando $T \to \infty$ si trovi ancora nello stesso autostato.

(5) Si supponga ora che l'hamiltoniana sia data da

$$H_2 = H_1 + \vec{B} \cdot (\mu_1 \vec{s}_1 + \mu_2 \vec{s}_2)\,, \tag{6}$$

con μ_1 e μ_2 costanti reali positive, H_1 dato dalla Eq. (3) (e le stesse ipotesi della domanda precedente), e

$$\vec{B} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Si determinino spettro e degenerazione della hamiltoniana di spin nel caso in cui le due particelle (non identiche) hanno entrambe spin $\frac{1}{2}$ e $\mu_1 = \mu_2$, trattando il termine proporzionale a μ come una perturbazione ed eseguendo il calcolo al primo ordine. È possibile determinare lo spettro in modo esatto?

(6) Si supponga ora $\mu_1 = 2\mu_2$ e si determinino nuovamente spettro e degenerazione della hamiltoniana di spin al primo ordine perturbativo. In questo caso, è possibile determinare lo spettro in modo esatto?