ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA I

25 settembre 2015

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Si consideri una sistema di due particelle unidimensionali di ugual massa, la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H_0 = \hbar\omega_1\left(a_1^\dagger a_1 + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega_2\left(a_2^\dagger a_2 + \frac{1}{2}\right) \tag{1}$$

dove a_i è un operatore che agisce sullo spazio degli stati fisici della i-esima particella, e gli a_i soddisfano le relazioni di commutazione

$$[a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0 \tag{2}$$

per ogni i, j, mentre

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}. \tag{3}$$

(1) Determinare lo spettro e la degenerazione dell'hamiltoniana Eq. (1). Discutere sia il caso $\omega_1 = \omega_2$ che il caso $\omega_1 \neq \omega_2$.

(2) Determinare la dipendenza dal tempo dei quattro operatori

$$N_{11} = a_1^\dagger a_1;\ N_{12} = a_1^\dagger a_2;\ N_{21} = a_2^\dagger a_1;\ N_{22} = a_2^\dagger a_2, \tag{4}$$

risolvendo le corrispondenti equazioni del moto alla Heisenberg con in generale $\omega_1 \neq \omega_2$. Discutere quindi il caso in cui $\omega_1 = \omega_2$.

(3) Determinare le relazioni di commutazione dei tre operatori

$$j_a = \sum_{i,j=1}^{2} a_i^\dagger \sigma_{ij}^a a_j, \tag{5}$$

dove σ_{ij}^a è la a–esima matrice di Pauli di componenti i, j. La normalizzazione delle matrici di Pauli è tale che $\sigma_3 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Quando $\omega_1 = \omega_2$, quali di questi operatori possono essere diagonalizzati simultaneamente all'hamiltoniana?

(4) Nel caso $\omega_1 = \omega_2$ determinare lo spettro dell'operatore j_2 Eq. (5). Sono ammessi autovalori semi-interi? Qual è il significato dell'operatore j_2?
Suggerimento: esprimere gli operatori a_i ed $a_i^\dagger$ in termini di opportuni operatori p_i e q_i che soddisfano relazioni di commutazione del tipo $[p_i, q_j] = -i\hbar\delta^{ij}$ e quindi determinare j_2 in termini di essi.

(5) Considerare ora l'hamiltoniana

$$H = H_0 + \lambda H_1 \tag{6},$$

dove λ è una costante reale positiva e

$$H_1 = \frac{\hbar}{2m\sqrt{\omega_1\omega_2}}\left(a_1^\dagger + a_1\right)\left(a_2^\dagger + a_2\right), \tag{7}$$

essendo m la massa delle particelle. Trattando il termine proporzionale a λ come una perturbazione, nell'ipotesi che $|\omega_1 - \omega_2| > \lambda$, determinare la correzione all'energia dello stato fondamentale di H_0 fino al secondo ordine perturbativo.

(6) Dimostrare che esistono degli operatori A_i in termini dei quali l'hamiltoniana Eq. (7) ha la forma

$$H = \hbar\Omega_1 A_1^\dagger A_1 + \hbar\Omega_2 A_2^\dagger A_2 \tag{8}.$$

L'espressione esplicita di A_i in termini di a_i non è richiesta.

(7) Determinare i valori di Ω_i nell'Eq. (8) in termini di ω_i, m e λ. Utilizzare il risultato per determinare lo spettro di H esattamente e confrontare con il risultato del calcolo perturbativo.