ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA

7 settembre 2017

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Considerare una particella tridimensionale la cui dinamica è descritta dall'hamiltoniana

$$H_0 = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \vec{A}(\vec{x})\right)^2, \tag{1}$$

dove $\vec{A}(\vec{x})$ è la funzione vettoriale dell'operatore posizione $\vec{x}$ data da

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{B}{2}\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

con B una costante reale positiva, e x_i la componente dell'operatore $\vec{x}$ lungo l'i–esimo asse cartesiano.

(1) Calcolare il commutatore della hamiltoniana Eq. (1) con le componenti degli operatori $\vec{x}$ e $\vec{p}$.

(2) Determinare le equazioni del moto alla Heisenberg per il sistema dato, e risolvere l'equazione del moto relativa alla terza coordinata.

(3) Determinare lo spettro della hamiltoniana data.
Suggerimento: separare la hamiltoniana come $H_0 = H_{12}(x_1, x_2, p_1, p_2) + H_3(x_3, p_3)$.

(4) *Domanda di teoria:* Dimostrare che esistono degli operatori di innalzamento ed abbassamento $J_\pm$ che agendo su un autostato $|\ell m\rangle$ del momento angolare e della sua terza componente producono un autostato $|\ell m \pm 1\rangle$ e determinarne la forma esplicita, supponendo note le relazioni di commutazione fra componenti del momento angolare. Dimostrare che la serie di stati che si ottengono per azione di questi operatori è necessariamente limitata.

(5) Dimostrare che gli operatori x'_i, p'_i definiti da

$$p'_1 = p_1 + \frac{B}{2}x_2 \tag{3}$$

$$p'_2 = p_2 + \frac{B}{2}x_1 \tag{4}$$

$$p'_3 = p_3 \tag{5}$$

$$\vec{x}' = \vec{x} \tag{6}$$

soddisfano relazioni di commutazione canoniche. Scrivere la hamiltoniana H_0 in termini degli operatori $\vec{x}'$ e $\vec{p}'$ e determinare lo spettro dell'hamiltoniana H'_0 ottenuta.
Suggerimento: calcolare il commutatore degli operatori p'_2 e p'_3 con H'_0.

(6) Considerare ora la hamiltoniana

$$H = H'_0 + \mathcal{E}x'_1, \tag{7}$$

dove $\mathcal{E}$ è una costante reale positiva ed H'_0 è la hamiltoniana determinata al punto precedente. Determinare lo spettro della hamiltoniana H in termini di quello della hamiltoniana H'_0 trattando il termine in $\mathcal{E}$ al primo ordine della teoria delle perturbazioni. Determinare quindi lo spettro in modo esatto e confrontare il risultato esatto e quello perturbativo.

(7) Dato un autostato dell'hamiltoniana Eq. (1) avente funzione d'onda $\langle\vec{x}|i\rangle = \psi_i(\vec{x})$, dimostrare che esiste una funzione $\Lambda(\vec{x}')$ tale che

$$\psi'_i(\vec{x}') = e^{-\frac{i}{\hbar}\Lambda(\vec{x}')}\psi_i(\vec{x}') \tag{8}$$

è un autostato della stessa hamiltoniana associato allo stesso autovalore di energia, ma scritto nella base canonica Eq. (3-6), e determinare esplicitamente la funzione $\Lambda(\vec{x})$.