ESAME SCRITTO DI MECCANICA QUANTISTICA

19 settembre 2019

Tempo massimo 3 ore. Non sono ammessi libri o appunti

Si consideri una sistema la cui dinamica è descritta dalla hamiltoniana

$$H_0 = H_1 + H_2 \tag{1}$$

dove

$$H_1 = \hbar\omega a_1^\dagger a_1; \qquad H_2 = \hbar\omega a_2^\dagger a_2 \tag{2}$$

dove gli a_i soddisfano le relazioni di commutazione

$$[a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0 \tag{3}$$

per ogni i, j, mentre

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}. \tag{4}$$

(1) Determinare lo spettro e la degenerazione della hamiltoniana Eq. (1).

(2) Definire i tre operatori

$$j^a = \frac{\hbar}{2} \sum_{i,j=1}^{2} a_i^\dagger \sigma_{ij}^a a_j, \tag{5}$$

dove σ_{ij}^a è la a–esima matrice di Pauli di componenti i, j, e determinare le relazioni di commutazione $[j^a, j^b]$ fra qualunque coppia di questi operatori. Normalizzare le matrici di Pauli in modo che abbiano autovalori ± 1.

(3) Determinare quali degli operatori j^a Eq. (5) possono essere diagonalizzati simultaneamente alla hamiltoniana H_0 Eq. (1).

(4) Scrivere gli autostati della hamiltoniana H_0 Eq. (1) nella base in cui sono diagonali H_1 e H_2 in termini degli autostati di H_1 e H_2. Dimostrare che in questa base è anche diagonale l'operatore j^3 Eq. (5) e determinarne lo spettro.

(5) *Domanda di teoria:* Dimostrare che condizione sufficiente affinché lo spettro di un operatore H sia degenere è che vi siano due operatori A, B, tali che $[A, B] \neq 0$ ma $[A, H] = [B, H] = 0$.

(6) Supporre ora che la hamiltoniana sia data da

$$H = H_0 + V, \tag{6}$$

dove

$$V = \hbar\lambda \left(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1 \right). \tag{7}$$

Trattando il termine proporzionale a λ come perturbazione, determinare la perturbazione al primo ordine all'autovalore di energia per il primo stato eccitato della hamiltoniana H_0 Eq. (1).

(7) Supporre che il sistema la cui evoluzione temporale è data dalla hamiltoniana H Eq. (6) si trovi al tempo $t = 0$ nel primo stato eccitato della hamiltoniana H_0, ed inoltre che si trovi in un autostato di j_3 con autovalore $+\frac{\hbar}{2}$. Determinare la probabilità che al tempo t esso venga rivelato in un autostato di j_3 con autovalore $-\frac{\hbar}{2}$.

Suggerimento: Scrivere il potenziale V Eq. (7) in termini degli operatori j^a Eq. (5).

(8) Determinare lo spettro e la degenerazione (supponendo λ ed ω incommensurabili) della hamiltoniana H Eq. (6) in modo esatto e, per quanto riguarda il primo stato eccitato, confrontare il risultato esatto con il risultato perturbativo.

(9) Dimostrare che esiste un operatore hermitiano J tale che, definito $R(\theta) = \exp i\theta J$, si ha

$$A_i = R(\theta) a_i R^{-1}(\theta), \tag{8}$$

dove $a_i^\dagger$, a_i sono operatori di creazione e distruzione per la hamiltoniana H_0 Eq. (1) mentre $A_i^\dagger$, A_i sono operatori di creazione e distruzione per la hamiltoniana H Eq. (6), e determinare J e θ.