Traccia di soluzione

18 - 7 - 2006

1) Il sistema è descritto dall'hamiltoniana libera

$$H = \frac{p^2}{2m} \tag{1}$$

con la condizione al contorno

$$\psi(0) = \psi(a) = 0 \tag{2}$$

Le autofunzioni di H hanno la forma

$$\psi_k(x) = A \sin kx + B \cos kx \tag{3}$$

Imponendo la condizione $\psi(0)=0$ si vede che

$$\psi_k(0) = B = 0 \tag{4}$$

Inoltre imponendo la condizione $\psi(a)=0$ si trova

$$\psi_k(a) = A \sin ak = 0 \tag{5}$$

che implica

$$ak = \pi n$$

cioè

$$k_n = \frac{n\pi}{a} \tag{6}$$

Quindi le autofunzioni di H

$$\psi_n(x) = A_n \sin \frac{\pi n}{a} x \tag{7}$$

e gli autovalori di energia sono

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2 m a^2} \qquad (8)$$

N.B. Lo stesso risultato si poteva ottenere a partire da quello relativo alla buca localizzata da $x=-\ell$ a $x=+\ell$ visto a lezione, con le sostituzioni $2\ell \to a$ e $x \to x+\ell$. Questa osservazione vale anche per le domande seguenti

2) Si ha

$$\langle x | \mathcal{R} | \psi \rangle = \psi(a-x) \qquad (9)$$

Infatti, l'azione di $\mathcal{R}$ sull'hamiltoniana è

$$\mathcal{R}^{-1} H \mathcal{R} = \frac{p^2}{2m} + V(a-x)$$

$$= \frac{p^2}{2m} + V(x) = H \qquad (10)$$

visto che sotto la trasf. $x \to a-x$ i punti all'interno (esterno) della buca restano all'interno (esterno).

3) La domanda (2) implica che

$$[\mathcal{R}, H] = 0 \qquad (11)$$

Perciò gli operatori $\mathcal{R}$ ed H possono essere diagonalizzati simultaneamente. Inoltre

$$\mathcal{R}^2 = \mathbb{1} \qquad (12)$$

quindi gli autovalori di $\mathcal{R}$ sono ± 1

Pertanto

$$\mathcal{R}\,|\psi_n\rangle = \pm 1\,|\psi_n\rangle \qquad (13)$$

Dall'espressione esplicita eq. (7) si vede inoltre che

$$\langle x|\mathcal{R}|\psi_n\rangle = A_n \sin\left(\pi n - \frac{\pi n x}{a}\right) = (-1)^{n+1} A_n \sin \pi \frac{n x}{a}$$

ossia

$$\mathcal{R}\,|\psi_n\rangle = (-1)^{n+1}\,|\psi_n\rangle \qquad (14)$$

Ne segue che

$$\begin{aligned}\langle \psi_n| x |\psi_n\rangle &= \langle \psi_n|\mathcal{R}\mathcal{R}^{-1} x \mathcal{R}^{-1}\mathcal{R}|\psi_n\rangle \\ &= \langle \psi_n|\mathcal{R}^{-1} x \mathcal{R}^{-1}|\psi_n\rangle \\ &= \langle \psi_n| a - x |\psi_n\rangle \end{aligned} \qquad (15)$$

ossia, se $\langle \psi_n|\psi_n\rangle = 1$

$$\langle \psi_n| x |\psi_n\rangle = \frac{a}{2} \qquad (16)$$

Inoltre, analogamente,

$$\begin{aligned}\langle \psi_n| p |\psi_n\rangle &= \langle \psi_n|\mathcal{R}^{-1} p \mathcal{R}^{-1}|\psi_n\rangle \\ &= -\langle \psi_n| p |\psi_n\rangle \end{aligned} \qquad (17)$$

come si vede nella rapp. delle coordinate:

$$\langle x| p |x'\rangle = -i h \frac{d}{dx}\delta(x-x')$$

$$\langle x|\mathcal{R} p \mathcal{R}^{-1}|x'\rangle = -i\hbar \frac{d}{d(a-x)}\delta(x-x') =$$

$$= (-1)(-i\hbar)\frac{d}{dx}\,\delta(x-x') \qquad (18)$$

Pertanto

$$\langle \psi_n | p | \psi_n \rangle = 0 \qquad (19)$$

4) Si ha

$$\langle \psi_n | (\Delta x)^2 | \psi_n \rangle = \langle x^2 \rangle_n - \langle x \rangle_n^2 \qquad (20)$$

$$\langle \psi_n | (\Delta p)^2 | \psi_n \rangle = \langle p^2 \rangle_n - \langle p \rangle_n^2 \qquad (21)$$

Calcoliamo prima la normalizzazione

$$\langle \psi_n | \psi_n \rangle = \int_0^a dx \, \sin^2 \frac{\pi n}{a} x \; |A_n|^2 =$$

$$= |A_n|^2 \frac{a}{2}$$

quindi $A_n = A = \sqrt{\frac{2}{a}}$ per ogni n (22)

Abbiamo inoltre

$$\langle \psi_n | x^2 | \psi_n \rangle = \int_0^a dx \left(\sin^2 \frac{\pi n}{a} x \right) x^2 |A_n|^2 =$$

$$= a^3 \frac{2}{a} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4 n^2 \pi^2} \right) = a^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2 n^2 \pi^2} \right)$$

(23)

Il calcolo di $\langle p^2 \rangle$ è immediato notando che

$|\psi_n\rangle$ sono autofunzioni di p^2 con autovalore $\hbar^2 k_n^2$:

$$p^2 |\psi_n\rangle = \hbar^2 k_n^2 |\psi_n\rangle$$

$$\langle p^2 \rangle_n = \hbar^2 k_n^2 = \left(\frac{n\pi\hbar}{a}\right)^2 \qquad (24)$$

Pertanto

$$(\Delta x)^2 = a^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n^2\pi^2}\right) - \frac{a^2}{4}$$

$$= a^2\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2n^2\pi^2}\right) = \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{n^2\pi^2}\right) \qquad (25)$$

$$(\Delta p)^2 = \left(\frac{n\pi\hbar}{a}\right)^2 \qquad (26)$$

$$\Delta x^2 \, \Delta p^2 = \hbar^2\left(\frac{n^2\pi^2}{12} - \frac{1}{2}\right) \qquad (27)$$

Osservazioni:

a) L'indeterm. è minima nello stato fondamentale

$$\Delta x^2 \Delta p^2 = \hbar^2\left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}\right) > \frac{\hbar^2}{4}$$

(si troverebbe $\frac{\hbar^2}{4}$ se si sostituisse $\pi \to 3$)

lo stato fond. non è uno stato di minima indet. $\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}$ poiché non è gaussiano

b) Δx non può crescere indefinitamente perché la buca ha larghezza finita.

c) $\Delta p > 0$ perché anche se $|u_n\rangle$ sono autostati di p^2, essi non sono autostati di p, bensì sovrapposizioni di due autostati di p associati agli autovalori $\pm \hbar k_n$.

5) $\frac{1}{2}\left(\langle \psi_n | + \langle \psi_m |\right) p \left(|\psi_n\rangle + |\psi_m\rangle \right) =$

$$= \langle \psi_n | \frac{p}{2} |\psi_m\rangle + \langle \psi_m | \frac{p}{2} |\psi_n\rangle^* =$$

$$= \mathrm{Re}\left(\langle \psi_n | p | \psi_m \rangle \right) \qquad (28)$$

avendo sfruttato l'hermiticità di p nell'ultimo passaggio.

Si: La

$$\langle \psi_n | p | \psi_m\rangle = -i\hbar |A|^2 \int_0^a dx \sin\frac{n2\pi x}{a} \frac{d}{dx} \sin\frac{m2\pi x}{a}$$

$$= -i\hbar |A|^2 \frac{m2\pi}{a} \int_0^a dx \sin\frac{n2\pi x}{a} \cos\frac{m2\pi x}{a}$$

$$= -i\hbar |A|^2 \frac{2\pi m I}{a} \qquad (29)$$

con

$$I \equiv \int_0^a dx \sin\frac{2\pi x n}{a} \cos\frac{m\pi x}{a} \qquad (30)$$

Ma

$$I = I^* \qquad (31)$$

quindi

$$\mathrm{Re}\left(-i\hbar |A|^2 \frac{4\pi}{a} I \right) = 0 \qquad (32)$$

Pertanto
$$\langle\varphi|p|\varphi\rangle = 0 = \langle x'|p|\psi\rangle \qquad (33)$$

6) Se si effettua una misura di energia, la misura da come risultato E_2, E_4 nel 50% dei casi, con E_n dati dalla eq. (8). Dopo la misura il sistema si trova rispettivamente negli stati ψ_2, ψ_4.

Se si effettua una misura di impulso, i risultati della misura sono $\pm\hbar k_2$, $\pm\hbar k_4$, ciascuno nel 25% dei casi.

Dopo la misura il sistema si trova nello stato
$$\psi_{k_i} = N e^{i\hbar k_i x} \qquad (34)$$

dove k_i è il risultato della misura ed N è una costante di normalizzazione

7) Al tempo t il sistema si trova nello stato
$$|\varphi; t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{\frac{1}{i\hbar}E_1 t}|1\rangle + e^{\frac{1}{i\hbar}E_2 t}|2\rangle\right) \qquad (35)$$

con
$$E_i = \frac{\hbar^2 k_i^2}{2m} \qquad (36)$$

e k_i dati dalla eq. (6).

Dalla eq. (28) abbiamo quindi

$$\langle X | p | X \rangle = \langle \psi_1 | \frac{p}{2} | \psi_2 \rangle \Big|_{t=0} e^{\frac{1}{i\hbar}(E_1 - E_2)t} + c.c. \qquad (36)$$

dove c.c. e' il complesso coniugato

Abbiamo

$$\langle \psi_1 | \frac{p}{2} | \psi_2 \rangle = -i\hbar |A|^2 I \qquad (37)$$

$$I = \int_0^a dx \sin\frac{\pi x}{a} \cos\frac{2\pi x}{a} \frac{2\pi}{a}$$

$$y = \frac{\pi x}{a} \qquad dy = \frac{\pi}{a} dx \qquad x = a \Rightarrow y = \pi$$

$$= \int_0^{\pi} dy \; 2 \sin y \cos 2y = \int_0^{\pi} 2 \sin y (2\cos^2 y - 1)$$

$$= 4 \int_{-1}^{1} d\cos y \left(\cos^2 y - \frac{1}{2}\right) = 4 \left(\frac{2}{3} - 1\right) = -\frac{4}{3} \qquad (38)$$

quindi $\langle \psi_1 | \frac{p}{2} | \psi_2 \rangle = \frac{8}{3} \frac{i\hbar}{a}$

Perciò

$$\langle X | p | X \rangle = \frac{\hbar}{a} \frac{8}{3} i \left(e^{\frac{1}{i\hbar}(E_1 - E_2)t} - e^{\frac{1}{i\hbar}(E_2 - E_1)t} \right)$$

$$= \frac{16}{3} \frac{\hbar}{a} \frac{e^{\frac{i(E_1 - E_2)t}{i\hbar}} - e^{\frac{-i(E_1 - E_2)t}{i\hbar}}}{2i} =$$

$$= \frac{16}{3} \frac{\hbar}{a} \sin \frac{(E_1 - E_2)t}{\hbar} \qquad (39)$$

Usando la eq. (8) abbiamo

$$E_1 - E_2 = -\frac{3}{2}\frac{\hbar^2\pi^2}{ma^2} \qquad (40)$$

8) Se viene eseguita una misura di energia dopo la misura di impulso, essa darà come risultato E_2 o E_4 con probabilità uno, a seconda che il risultato della misura di impulso fosse stato $\pm k_2$, oppure $\pm k_4$. Se al tempo t viene eseguita una misura di energia, dopo la misura il sistema si trova in un autostato di energia e quindi la eq. (19) implica che

$$\langle p(t)\rangle = 0 . \qquad (41)$$

Se vine eseguita una misura di impulso dopo la misura il sistema si trova in uno dei quattro autostati dell'impulso $|\pm 2\rangle$, $|\pm 4\rangle$. Poichè questi stati hanno energia definita (pur non essendo autostati dell'energia, perchè non soddisfano la cond. al contorno) essi evolvono nel tempo come

$$|\pm n\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}E_n t}\,|n\rangle \qquad (42)$$

Pertanto in tal caso $\langle p\rangle = k_n$ ad ogni tempo t.