Meccanica Quantistica I - 15-9-05

Traccia di soluzione

1) Esprimendo q in termini di operatori di creazione e distruzione si ha

$$q = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a + a^{\dagger}\right) \qquad (1)$$

$$\langle m|q|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\langle m|(a + a^{\dagger})|n\rangle \qquad (2)$$

Ma

$$\langle m|a^{\dagger}|n\rangle = \delta_{m,n+1}\sqrt{n+1} \qquad (3)$$

$$\langle m|a|n\rangle = \delta_{m,n-1}\sqrt{n} \qquad (4)$$

quindi

$$\langle m|V_\varepsilon|n\rangle = \varepsilon\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\delta_{m,n+1}\sqrt{n+1} + \delta_{m,n-1}\sqrt{n}\right) \qquad (5)$$

Il commutatore di H_0 e V_ε è

$$[H_0, V_\varepsilon] = \frac{\varepsilon}{2m}[p^2, q] = \frac{\varepsilon p}{m}(-i\hbar) \neq 0 \qquad (6)$$

pertanto H_0 e V_ε non possono essere diagonalizzati simultaneamente.

2) La correzione al primo ordine all'autovalore $E_n^{(0)}$ è

$$E_n^{(1)} = \langle n|V_\varepsilon|n\rangle = \varepsilon\langle n|q|n\rangle = 0 \qquad (7)$$

poiché la (5) implica che $\langle n|V_\varepsilon|m\rangle \neq 0$ solo se $m \neq n$.

La correzione al secondo ordine è data da

$$E_n^{(2)} = \sum_{k \neq n} \frac{|\langle k | \varepsilon q | n \rangle|^2}{(E_n^{(0)} - E_k^{(0)})} \qquad (8)$$

Ora ricordiamo le

$$E_n^{(0)} = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \qquad (9)$$

Pertanto la (5) implica

$$E_n^{(2)} = \varepsilon^2 \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\frac{(\sqrt{n+1})^2}{-\hbar\omega} + \frac{(\sqrt{n})^2}{\hbar\omega}\right) =$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{2m\omega^2}\left(n - n+1\right) = -\frac{\varepsilon^2}{2m\omega^2} \qquad (10)$$

3) In rappresentazione di interazione,

$$\frac{dV_\varepsilon}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[V_\varepsilon, H_0] \qquad (11)$$

Usando la eq. (6) si ha (12)

$$\frac{dV_\varepsilon}{dt} = \frac{\varepsilon p}{m}$$

Ma

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[p, H_0] = -m\omega^2 q \qquad (13)$$

Pertanto

$$\frac{d^2V_\varepsilon}{dt^2} = -\varepsilon\omega^2 q \qquad (14)$$

$$q(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \qquad (15)$$

Le costanti A e B si fissano con le condizioni iniziali

$$q(0) = A$$
$$\dot q(0) = \frac{p(0)}{m} = B$$

da cui
$$q(t) = q(0)\cos\omega t + \frac{p(0)}{m}\sin\omega t \qquad (16)$$

4) lo spettro dell'hamiltoniana $H_0 + V_\varepsilon$ si può determinare notando che

$$H = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 + \varepsilon q$$
$$= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\left(q + \frac{\varepsilon}{m\omega^2}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{m\omega^2} \qquad (17)$$
$$= \tilde H - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{m\omega^2}$$

dove $\tilde H$ è l'hamiltoniana di un oscillatore armonico scritta in termini degli operatori p e

$$\tilde q \equiv q + \frac{\varepsilon}{m\omega^2}, \quad \tilde H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\tilde q^2 \qquad (18)$$

con
$$[p, \tilde q] = [p, q] = -i\hbar \qquad (19)$$

(osc. armonico centrato in $q = -\frac{\varepsilon}{m\omega^2}$)

Lo spettro di $\tilde H$ è lo stesso di quello di H_0, perché la (19) implica che il commutatore degli a, a^+ calcolati da $\tilde q, p$ è lo stesso di quelli calcolati da q e p

Pertanto lo spettro di H è dato da

$$E_n = E_n^{(0)} - \frac{\varepsilon^2}{2m\omega^2} \tag{20}$$

Pertanto, il risultato perturbativo del secondo ordine eq. (10) è esatto.

5) Utilizzando il commutatore fondamentale

$$[q, f(p)] = i\hbar \frac{\partial f}{\partial p} \tag{21}$$

con

$$f(p) \equiv \exp -\frac{i}{\hbar}\alpha p \tag{22}$$

si ha

$$q\, e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha p} = e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha p} q + \left(-\frac{i}{\hbar}\right) i\hbar\, \alpha\, e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha p} \tag{23}$$

e quindi

$$e^{+\frac{i}{\hbar}\alpha p}\, q\, e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha p} = q + \alpha \tag{24}$$

Pertanto, con $\alpha = \frac{\varepsilon}{m\omega^2}$, la eq. (24) implica

$$T^\dagger q^2 T = T^\dagger q T T^\dagger q T = \left(T^\dagger q T\right)^2 = \left(q + \frac{\varepsilon}{m\omega^2}\right)^2 = \hat{q}^2 \tag{25}$$

da cui, ricordando la (17),

$$T^\dagger H_0 T = \hat{H}$$

che implica il risultato voluto. T è l'operatore di traslazione, e la trasformazione $q \Rightarrow q + \alpha$ è una traslazione finita di q.

6) Vogliamo determinare

$$\langle\psi_0|\, q(t)\, |\psi_0\rangle \qquad (26)$$

a. dove

$$H_0 |\psi_0\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega\, |\psi_0\rangle \qquad (27)$$

Notiamo che per la eq. (25)

$$q_s = \tilde{q}_s - \frac{\varepsilon}{m\omega^2}$$

$$= T^+ q_s T - \frac{\varepsilon}{m\omega^2} \qquad (28)$$

Notiamo inoltre che le eq. (18) – (19) implicano che $\tilde{q}(t)$ in rappresentazione di Heisenberg soddisfa la stessa legge di evol. temporale che $q(t)$ per un osill. armonico ordinario, cioè

$$\hat{q}(t) = \tilde{q}(0)\cos\omega t + \frac{p(0)}{m}\sin\omega t \qquad (29)$$

come già dimostrato nella eq. (16).

Pertanto

$$\langle\psi_0|\, q(t)\, |\psi_0\rangle = \langle\psi_0|\, \tilde{q}(t)\, |\psi_0\rangle - \frac{\varepsilon}{m\omega^2} \qquad (30)$$

$$= \cos\omega t\, \langle\psi_0|\, \tilde{q}(0)\, |\psi_0\rangle + \frac{\sin\omega t}{m}\, \langle\psi_0|\, p(0)\, |\psi_0\rangle - \frac{\varepsilon}{m\omega^2} \qquad (31)$$

Ma

$$\langle\psi_0|\, p(0)\, |\psi_0\rangle = 0 \qquad (32)$$

mentre

$$\langle\psi_0|\, \tilde{q}(0)\, |\psi_0\rangle = \langle\psi_0|\, q(0)\, |\psi_0\rangle + \frac{\varepsilon}{m\omega^2} = \frac{\varepsilon}{m\omega^2} \qquad (33)$$

Pertanto

$$\langle\psi_0|\, q(t)\, |\psi_0\rangle = \frac{\varepsilon}{m\omega^2}(\cos\omega t - 1) \qquad (34)$$