13 - 9 - 2006 - Fisica Moderna

Traccia di soluzione

1) L'hamiltoniana è

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \delta \hat{x} \qquad (1)$$

I commutatori sono quindi

$$[H, \hat{p}] = \delta [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \delta \qquad (2)$$

$$[H, \hat{x}] = \frac{1}{2m} [\hat{p}^2, \hat{x}] = \frac{\hat{p} [\hat{p}, \hat{x}] + [\hat{p}, \hat{x}] \hat{p}}{2m}$$

$$= -i\hbar \frac{\hat{p}}{m} \qquad (3)$$

$$[H, \hat{p}^2] = \delta [\hat{x}, \hat{p}^2] = \delta \left(\hat{p} [\hat{x}, \hat{p}] + [\hat{x}, \hat{p}] \hat{p} \right)$$

$$= 2 \delta i\hbar \hat{p} \qquad (4)$$

$$[H, \hat{x}^2] = \frac{1}{2m} [\hat{p}^2, \hat{x}^2] = \frac{1}{2m} \left(\hat{p} [\hat{p}, \hat{x}^2] + [\hat{p}, \hat{x}^2] \hat{p} \right.$$

$$= -\frac{\cancel{2} i\hbar}{2m} \left(\hat{p}\hat{x} + \hat{x}\hat{p} \right) = -\frac{i\hbar}{m} \left(\hat{p}\hat{x} + \hat{x}\hat{p} \right)$$

2) Le eq. del moto in rapp. di Heisenberg sono date da

$$\frac{d}{dt} \hat{x}(t) = \frac{1}{i\hbar} [\hat{x}(t), H] = \frac{\hat{p}(t)}{m} , \qquad (6)$$

avendo usato la eq. (3) con il comm. fondamentale

$$[\hat{x}(t), \hat{p}(t)] = i\hbar \,,$$

e $$\frac{d\hat{p}(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{p}_o(t), H\right] = -\delta \qquad (7)$$

avendo usato la eq. (2).

La eq. (7) si risolve con la cond. iniziale

$$\hat{p}(0) = \hat{p}_S \,, \qquad (8)$$

dove $\hat{p}_S$ è l'op. in rapp. di Schrödinger, ed ha per soluzione

$$\hat{p}(t) = \hat{p}_S - \delta t \qquad (9)$$

La eq. (6) diventa, sostituendo la (9),

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \frac{1}{m}\left(\hat{p}_S - \delta t\right) \qquad (10)$$

che ha per soluzione, con cond. iniziale

$$\hat{x}(0) = \hat{x}_S \,, \qquad (11)$$

$$\hat{x}(t) = \hat{x}_S + \frac{1}{m}\left(\hat{p}_S t - \frac{1}{2}\delta t^2\right) \qquad (12)$$

Notiamo che le eq. (9), (12) coincidono con le leggi del moto classico uniformemente accelerato, con le sostituzioni di x e p con gli operatori quantistici corrispondenti.

3) L'elemento di matrice si determina usando gli el. di matrice fondamentali (ricavati a lezione) nella base degli impulsi:

$$\langle p | \hat{p} | p' \rangle = p\, \delta(p-p') = p' \delta(p-p') \qquad (13)$$

$$\langle p | \hat{x} | p' \rangle = i\hbar \frac{d}{dp}\, \delta(p-p') \qquad (14)$$

$$= -i\hbar \frac{d}{dp'}\, \delta(p-p')$$

Si ha quindi, a $t = 0$

$$\langle p | H | p' \rangle = \left(\frac{p^2}{2m} + i\hbar\, \delta \frac{d}{dp} \right) \delta(p-p') \qquad (15)$$

L'el. di matrice ad ogni t si potrebbe determinare sostituendo le eq. del moto (9), (12), tuttavia si trova immediatamente osservando che l'hamiltoniana H eq. (1) non dipende esplicitamente dal tempo, ossia essa non dipende dal tempo in rapp. di Schröödinger.
Pertanto l'operatore di evoluzione temporale è dato da

$$S(t,0) = e^{\frac{1}{i\hbar} H t} \qquad (16)$$

Quindi l'el. di matrice al tempo t è dato da

$$\langle p | e^{-\frac{1}{i\hbar} H t}\, H\, e^{+\frac{1}{i\hbar} H t} | p' \rangle =$$

$$= \langle p | H | p' \rangle \qquad (17)$$

cioè è indipendente dal tempo, ~~esso~~ ed è dato dalla eq. (15) per ogni tempo t.

Questo è una conseguenza del fatto che il sistema, cioè l'hamiltoniana eq. (1), è invariante per traslazioni temporali.

4) Dopo la misura il sistema si trova in un autostato $|p\rangle$ dell'impulso. Tuttavia, l'hamiltoniana non commuta con l'operatore impulso come si vede dalla eq. (2). Quindi ad un tempo $t > t_0$ il sistema si trova in uno stato

$$|\psi_p(t)\rangle = e^{i(t-t_0)H}\,|p\rangle, \qquad (18)$$

avendo usato l'op. di evoluzione temporale eq. (16).

Lo stato $|\psi_p(t)\rangle$ non è un autostato dell'impulso e quindi il risultato della seconda misura è in generale $|p'\rangle \neq |p\rangle$, con probabilità $|\langle p'|\psi_p(t)\rangle|^2$.

Se invece si esegue una misura di energia il sist. dopo la misura si trova in un autostato $|E\rangle$ dell'energia.

Poiché l'hamiltoniana non dipende dal tempo si ha

$$\begin{aligned} |\psi_E(t)\rangle &= e^{i(t-t_0)H}\,|E\rangle \\ &= e^{i(t-t_0)E}\,|E\rangle \end{aligned} \qquad (19)$$

(stato stazionario). Quindi in questo caso la seconda misura dà sempre lo stesso risultato della prima.

5) Definendo la funzione d'onda nella base degli impulsi

$$\langle p | \psi \rangle = \psi(p) \qquad (20)$$

ed usando la eq. (15), l'eq. agli autovalori diventa

$$\frac{p^2}{2m} \psi(p) + i \hbar \delta \frac{d\psi}{dp}(p) = E \psi(p) \qquad (21)$$

ossia

$$\frac{d\psi}{dp} = \frac{1}{i\hbar\delta} \left(E - \frac{p^2}{2m} \right) \psi(p) \qquad (22)$$

Questa è una eq. del primo ordine che ha per soluzione

$$\psi(p) = N \exp \frac{1}{i\hbar\delta} \left(Ep - \frac{p^3}{6m} \right) \qquad (23)$$

dove la condizione iniziale N è una costante di normalizzazione.

6) Un'autofunzione dell'energia (stato stazionario) dipende dal tempo secondo la eq. (19).
Si ha quindi

$$\langle p | \psi(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dE \, \langle p | E \rangle \langle E | \psi(t) \rangle \qquad (24)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dE \, \langle p | E \rangle \langle E | S(t) | \psi \rangle \qquad (25)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dE \; e^{\frac{1}{i\hbar} E t} \langle p | E \rangle \langle E | \psi \rangle \qquad (26)$$

Ma l'autofunzione di energia $|E\rangle$ nella base degli impulsi è data dalla eq. (23), quindi

$$\langle p | \psi(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dE \; N \exp \frac{1}{i\hbar} \left(E t + \frac{E p}{\delta} - \frac{p^3}{6 m \delta} \right) \psi(E) \qquad (27)$$

dove

$$\psi(E) \equiv \langle E | \psi \rangle \qquad (28)$$

è il prod. scalare tra la condizione iniziale e l'autofunz. di energia.

Il risultato si può semplificare ponendo

$$p' = p + \delta t$$

cosicché

$$\langle p | \psi(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dE \; N \exp \frac{1}{i\hbar\delta} \left(E p' - \frac{(p' - \delta t)^3}{6m} \right) \psi(E)$$

$$= \exp \frac{1}{i\hbar 6 m \delta} \left(\delta^3 t^3 - 3 p' \delta^2 t^2 + 3 p'^2 \delta t \right)$$

$$\times N \int_{-\infty}^{\infty} dE \; \exp \frac{1}{i\hbar\delta} \left(E p' - \frac{p'^3}{6m} \right) \psi(E) \qquad (29)$$

Ma il termine sotto integrale è uguale alla funzione d'onda iniziale, con $p \to p'$.

Quindi

$$\Psi(p,t) = \exp \frac{1}{6mi\hbar}\left(\delta^2 t^3 - 3p'\delta t^2 + 3p'^2 t\right)\psi(p+\delta t)$$

$$= \exp \frac{1}{6mi\hbar}\left(\delta^2 t^3 - 3p\delta t^2 - 3p^2 t\right)\psi(p+\delta t) \qquad (30)$$

7) Se al tempo $t=0$ si esegue una misura di energia lo stato si trova dopo la misura in un autostato $|E_0\rangle$. Al tempo t esso si trova nello stesso stato a meno di una fase, e quindi la misura di impulso dà $|p\rangle$ con densità di probabilità

$$P_p = |\langle p|E_0\rangle|^2 \qquad (31)$$

dove $\langle p|E_0\rangle$ è l'autofunz. di energia eq. (23).

Se al tempo $t=0$ si esegue una misura di impulso lo stato dopo la misura si trova in un autostato di impulso $|p_0\rangle$.

L'evoluzione temporale è quella discussa alla domanda precedente, con

$$\psi(p) = \langle p|\psi(t)\rangle\Big|_{t=0} = \langle p|p_0\rangle = \delta(p-p_0) \qquad (32)$$

La misura di impulso al tempo t dà p con densità di probabilità

$$P_p = |\psi_{p_0}(p,t)|^2 \qquad (33)$$

dove $\psi_{p_0}(p,t)$ è data dalla eq. (30) con la $\psi(p)$ eq. (32)