Traccia di soluzione

Fisica moderna - 23-1-2007

i) Ricordiamo che $[a,a^+]=1$, e che $a^+a=N$ tale che $N|n\rangle=n|n\rangle$

Abbiamo $\langle n|a|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\frac{1}{\sqrt{k!}}\langle 0|a^n a(a^+)^k|0\rangle =$

$$= \frac{1}{\sqrt{n!k!}}\langle 0|a^{n+1}(a^+)^k|0\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n!k!}}\langle 0|\left(a^n(a^+)^{k-1} + a^n a^+ a(a^+)^{k-1}\right)|0\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n!k!}}\langle 0|a^n a^{+\,k-1}|0\rangle \left(1+k-1\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n!k!}}\, k\,\langle 0|a^n(a^+)^{k-1}|0\rangle \qquad (1)$$

Ripetendo la procedura k volte ci sono due possibilità

a) $k\neq n+1$

In tal caso o $k>n+1$, e si finisce con

$$= \dots \times \langle 0|a^{(n+1)-k}|0\rangle = 0 \quad \text{perché } a|0\rangle=0$$

o $k<n+1$, ed all'$n+1$ passaggio si trova

$$= \dots \times \langle 0|(a^+)^{k-1-n}|0\rangle = 0 \quad \text{perché } \langle 0|a^+=0$$

b) $k=n+1$

$$= \frac{(n+1)!}{\sqrt{n!(n+1)!}}\,\langle 0|0\rangle = \sqrt{n+1} \qquad (2)$$

Quindi

$$\langle n | a | k \rangle = \delta_{n+1\, k} \sqrt{n+1} \qquad (3)$$

$$= \delta_{n\, k-1} \sqrt{n} \qquad (4)$$

Ne segue anche

$$\langle k | a^{+} | n \rangle = \delta_{k\, n+1} \sqrt{n+1} \qquad (5)$$

$$= \delta_{k-1\, n} \sqrt{n} \qquad (6)$$

2) Ricordiamo che

$$e^{-\frac{i}{\hbar} c_1 p} \, q \, e^{\frac{i}{\hbar} c_1 p} = q - c_1 \qquad (7)$$

$$e^{-\frac{i}{\hbar} c_2 q} \, p \, e^{\frac{i}{\hbar} c_2 q} = p + c_2 \qquad (8)$$

Pertanto, moltipl. a sinistra per $e^{-\frac{i}{\hbar} c_2 q}$ e $e^{-\frac{i}{\hbar} c_1 p}$ si ha

$$e^{-\frac{i}{\hbar} c_2 q} \, e^{-\frac{i}{\hbar} c_1 p} \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(q + \frac{ip}{m\omega} \right) e^{\frac{i}{\hbar} c_1 p} \, e^{\frac{i}{\hbar} c_2 q} |0\rangle =$$

$$= -\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(c_1 - \frac{i c_2}{m\omega} \right) |0\rangle + a |0\rangle = \alpha |0\rangle \qquad (9)$$

da cui segue la eq. (5) del testo con

$$\alpha = -\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(c_1 - \frac{i c_2}{m\omega} \right)$$

3)

$$\langle n | \alpha \rangle = \langle 0 | \frac{a^n}{\sqrt{n!}} | \alpha \rangle = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle 0 | \alpha \rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \qquad (10)$$

4)

$$|\alpha(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega_n t} |n\rangle e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \quad (11)$$

dove
$$\omega_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\omega \quad (12)$$

$$= e^{-\frac{i}{2}\omega t - \frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha e^{-i\omega t}\right)^n |n\rangle \quad (13)$$

5) Il risultato della misura è $E_n = \hbar\omega_n$ (con ω_n dato dalla (12)) con probabilità

$$P_n = |\langle\alpha|n\rangle|^2 = \frac{|\alpha|^n}{n!} e^{|\alpha|^2} \quad (14)$$

Dopo la misura il sistema si trova nello stato

$$|n(t)\rangle = e^{-i\omega_n(t-t_0)} |n\rangle \quad (15)$$

6) Le eq. (7-8) implicano che a $t=0$

$$\langle\alpha|q|\alpha\rangle = -c_1$$
$$\langle\alpha|p|\alpha\rangle = +c_2 \quad (16)$$

Inoltre la (13) implica che al tempo t, in rapp. di Schrödinger, $\alpha \to \alpha(t) = e^{-i\omega t}\alpha$. Pertanto

$$\langle\alpha(t)|q|\alpha(t)\rangle = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \,\mathrm{Re}\, \alpha e^{-i\omega t} = -c_1\cos\omega t + \frac{c_2}{m\omega}\sin\omega t$$

$$\langle\alpha(t)|p|\alpha(t)\rangle = +\sqrt{2\hbar m\omega} \,\mathrm{Im}\, \alpha e^{-i\omega t} = \quad (17)$$

$$= c_2\cos\omega t - m\omega c_1 \sin\omega t$$

7) In rapp. di Heisenberg per l'oscillatore armonico

$$x(t) = x(0)\cos\omega t + \frac{p(0)}{m\omega}\sin\omega t \qquad (18)$$

$$p(t) = p(0)\cos\omega t - m\omega\, x(0)\sin\omega t$$

Quindi usando le eq. (16) nella eq. (18) si ritrova la (17)

8) Per definizione, lo stato $|\alpha\rangle$ è ottenuto applicando a $t=0$ una traslazione in p e q allo stato fondamentale dell'osill. armonico. Ma lo stato fond. dell'osc. armonico è un pacchetto gaussiano avente minima indeterminazione:

$$\Delta p = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \quad , \quad \Delta q = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \qquad (18)$$

Ma è facile vedere che $\Delta^2 p$ e $\Delta^2 q$ sono invarianti per traslazioni:

$$\langle\alpha|\Delta^2 p|\alpha\rangle = \langle\alpha|(p - \langle p\rangle_\alpha)^2|\alpha\rangle =$$

$$= \langle 0|(p + c_2 - c_2)^2|0\rangle =$$

$$= \langle 0|(p - \langle p\rangle_0)^2|0\rangle \qquad (19)$$

ed analog. per Δq. Inoltre, a tutti i tempi t lo stato α si trova da quello a $t=0$ ponendo $\alpha \to \alpha(t)$. Quindi la (18) vale a tutti i tempi. Pertanto lo stato $|\alpha\rangle$ è un pacchetto gaussiano per ogni t.