Traccia di soluzione

Fisica moderna - 29-1-2009

1) Ricordando

$$x = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\,\frac{1}{2}\left(a + a^{+}\right) \qquad (1)$$

$$p = -i\sqrt{2m\hbar\omega}\,\frac{1}{2}\left(a - a^{+}\right) \qquad (2)$$

$$a^{+}|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \qquad (3)$$

$$a\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \qquad (4)$$

si ha

$$\langle x\rangle_{\psi} = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\,\frac{1}{2}\,\frac{\left[(1+2i)+(1-2i)\right]}{6} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \qquad (5)$$

$$\langle p\rangle_{\psi} = \sqrt{2m\hbar\omega}\;\frac{2}{6} = \frac{1}{3}\sqrt{2m\hbar\omega} \qquad (6)$$

$$\langle x\rangle_{\varphi} = \langle p\rangle_{\varphi} = 0 \qquad (7)$$

2)

$$|\varphi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(e^{\frac{1}{i\hbar}E_0 t}|0\rangle + (1+2i)\,e^{\frac{1}{i\hbar}E_2 t}\right) \qquad (8)$$

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}\,, \qquad E_2 = \frac{5}{2}\hbar\omega \qquad (9)$$

$$\langle\varphi(t)|\,x\,|\varphi(t)\rangle = \langle\varphi(t)|\,p\,|\varphi(t)\rangle = 0 \qquad (10)$$

3) Ricordando

$$(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \tag{11}$$

$$(\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$$

$$x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(a^2 + a^{+2} + 2a^+a + 1\right) \tag{12}$$

$$p^2 = \frac{m\omega\hbar}{2}\left(2a^+a + 1) - a^2 - a^{+2}\right)$$

e

$$a^+a\,|n\rangle = N|n\rangle = n|n\rangle \tag{13}$$

si ~~ha~~ ha, usando le eq. (3-4)

$$\langle x^2 \rangle_\psi = \frac{\hbar}{2m\omega}\,\frac{1}{6}\left(1 + 3\cdot 5\right) = \frac{4}{3}\frac{\hbar}{m\omega} \tag{14}$$

$$\langle p^2 \rangle_\psi = \frac{4}{3}\,m\hbar\omega \tag{15}$$

$$\Delta x^2 = \frac{23}{18}\,\frac{\hbar}{m\omega} \tag{16}$$

$$\Delta p^2 = \frac{10}{9}\hbar m\omega \tag{17}$$

$\Delta x^2\,\Delta p^2 > \frac{\hbar^2}{4}$ in quanto lo stato dato, essendo la sovrapp. di due stati diversi, non è di minima indeterminazione (solo lo stato fondamentale $|0\rangle$ è di minima indeterminazione)

) a) $[\theta, H] = 0$ (18)

Infatti

$$\theta H \theta^{-1} = \frac{p^2}{2m} + V(-x) = \frac{p^2}{2m} + V(x) \qquad (19)$$

Quindi θ ed H possono essere diagonalizzati simultaneamente.

Poiché lo spettro di H non è degenere, gli autostati di H sono automaticamente autostati di θ.

Si ha inoltre

$$\theta |0\rangle = |0\rangle \qquad . (20)$$

n quanto $|0\rangle$ è una gaussiana (stato di minima indeterminazione). Infine, le eq. (1)-(2) implicano

$$\theta a \theta^{-1} = -a \qquad (21)$$

$$\theta a^\dagger \theta^{-1} = -a^\dagger \qquad (22)$$

Quindi

$$\theta \; |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \theta (a^\dagger)^n |0\rangle = (-1)^n |n\rangle \qquad (23)$$

Pertanto

$$\theta \; |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(|0\rangle - (1+2i) |1\rangle \right) \neq |\psi\rangle \qquad (24)$$

→ non è autostato

$$\theta |\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(|0\rangle + (1+2i) |2\rangle \right) = |\varphi\rangle \qquad (25)$$

→ è autostato

c) Poiché $[P, H] = 0$ ne segue che

$$[P, S] = 0 \tag{26}$$

dove S è l'op. di evoluzione temporale. Pertanto se uno stato è (non è) autostato di P al ~~tempo~~ tempo t_0, lo è (non lo è) anche a ~~tu~~ tutti gli altri tempi t.

5) Risultati

a)
$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} \quad \text{probabilità} \quad \frac{1}{6}$$
$$E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega \quad \text{"} \quad \frac{5}{6} \tag{27}$$

b) Dopo la misura

Risultato E_0 $\quad \Delta x^2 = \langle 0 | \Delta x^2 | 0 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}$; $\Delta p^2 = \frac{m\omega}{2}\hbar$ (28)

Risultato E_1 $\quad \Delta x^2 = \frac{3}{2}\frac{\hbar}{m\omega}$; $\Delta p^2 = \frac{3}{2} m\hbar\omega$ (29)

c) ~~$\langle x(t) \rangle$~~

Subito dopo la misura $\langle x \rangle = \langle p \rangle = 0$ (30)

perché in qualunque autostato di H $\langle x \rangle = \langle p \rangle = 0$, ~~ma~~ in seguito al fatto che x e p sono dispari, mentre $|\psi(x)|^2$ è sempre pari. Inoltre, visto che

$$\langle x(t) \rangle = \langle x(0) \rangle \cos\omega t + \frac{\langle p(0) \rangle}{m\omega} \sin\omega t$$
$$\langle p(t) \rangle = -m\omega \langle x(0) \rangle \sin\omega t + \langle p(0) \rangle \cos\omega t \tag{31}$$

si ha immediatamente $\langle x(t) \rangle = \langle p(t) \rangle = 0$ (32)
per ogni tempo t

6) Si ha immediatamente che

$$[N, H] = 0 \tag{33}$$

poiché

$$H = \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2}\right) \tag{34}$$

Quindi

$$e^{i\pi N}|n\rangle = e^{i\pi n}|n\rangle = (-1)^n |n\rangle \tag{35}$$

7) Per un qualunque stato $|\psi\rangle$, introducendo una risol. dell'identità

$$\langle x|\Pi|\psi\rangle = \sum_n \langle x|\Pi|n\rangle\langle n|\psi\rangle = \tag{36}$$

$$= \sum_n (-1)^n \langle x|n\rangle\langle n|\psi\rangle = \tag{37}$$

$$= \sum_n (-1)^n \psi_n(x) \langle n|\psi\rangle = \tag{38}$$

$$= \sum_n \psi_n(-x)\langle n|\psi\rangle = \sum_n \langle -x|n\rangle\langle n|\psi\rangle \tag{39}$$

$$= \langle -x|\psi\rangle = \langle x|P|\psi\rangle \tag{40}$$

dove nella eq. (38) si è fatto uso della eq. (23).