Traccia di soluzione

12 - 1 - 2011

1) Si ha $\quad T = \dfrac{p^2}{2m}$

$$V = kx$$

I commutatori sono quindi

$$[H, p] = k[x, p] = i\hbar k \qquad (1)$$

$$[H, x] = \frac{1}{2m}[p^2, x] = -i\hbar \frac{p}{m} \qquad (2)$$

$$[H, T] = \frac{1}{2m}[H, p^2] = \frac{k}{2m}[x, p^2] = \frac{i\hbar k}{m} p \qquad (3)$$

$$[H, V] = k[H, x] = -i\hbar k \frac{p}{m} \qquad (4)$$

2) Per determinare quali operatori possono essere diagonalizzati simultaneamente, ~~determiniamo~~ osserviamo inoltre che

$$[T, p] = 0 \qquad (5)$$

$$[V, x] = 0 \qquad (6)$$

$$[T, x] \neq 0 \qquad (7)$$

$$[V, p] \neq 0 \qquad (8)$$

$$[x, p] \neq 0 \qquad (9)$$

Quindi possono essere diagonalizzati simultaneamente T e p, e V e x. Nessuno degli altri op. può essere diagonalizzato simultaneamente ed in particolare nessuno simultaneamente all' hamiltoniana

3) Le eq. del moto in rapp. di Heisenberg sono

$$\frac{d}{dt} x = \frac{1}{i\hbar}[x, H] = \frac{p}{m} \qquad (10)$$

$$\frac{d}{dt} p = \frac{1}{i\hbar}[p, H] = -k \qquad (11)$$

Abbiamo pertanto che, con le condizioni iniziali

$$p(0) = p_S \qquad (12)$$

$$x(0) = x_S \qquad (13)$$

dove p_S, x_S sono gli operatori alla Schrödinger, la sol. della Eq. (11) è

$$p = p_S - kt, \qquad (14)$$

da cui si ha che la eq. (10) diventa

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p_S - kt}{m} \qquad (15)$$

da cui

$$x = x_S + \frac{1}{m}\left(p_S t - \frac{1}{2}kt^2\right) \qquad (16)$$

4) Il principio di indeterminazione implica che

$$\Delta^2 x(t)\, \Delta^2 x(0) \geq \frac{1}{4}\left|[x(t), x_0(0)]\right|^2 \qquad (17)$$

Ma

$$[x(t), x(0)] = \left[x_S + \frac{1}{m}\left(p_S t - \frac{1}{2}kt^2\right), x_S\right] \qquad (18)$$

$$= \frac{t}{m}[p_S, x_S] = \frac{-i\hbar t}{m}$$

Pertanto, se l'indeterminazione della misura al tempo t è $\Delta^2 x$, l'indet. della misura al tempo t è

$$\Delta^2 x(t) \geq \frac{1}{4} \frac{\hbar^2 t^2}{m^2} \frac{1}{\Delta^2 x} \qquad (19)$$

(densità di)

5) La probabilità di una misura di impulso in un autostato dell'hamiltoniana

$$H|\psi_E\rangle = E|\psi_E\rangle \qquad (20)$$

è data da

$$P_p = |\psi_E(p)|^2 \qquad (21)$$

dove

$$\psi_E(p) = \langle p|\psi_E\rangle$$

è la funzione d'onda per un autostato di energia nella base degli impulsi.

Questa può essere determinata risolvendo l'eq. di Schrödinger nello spazio degli impulsi: ricordando che

$$\langle p|x|p'\rangle = i\hbar \frac{d}{dp} \delta(p-p') \qquad (22)$$

si ha che

$$\langle p|H|\psi\rangle = E\langle p|\psi\rangle$$

diventa

$$\left(\frac{p^2}{2m} + i\hbar k \frac{d}{dp}\right)\psi_E(p) = E\,\psi_E(p) \qquad (23)$$

ossia

$$\frac{d\psi_E}{dp} = \frac{1}{i\hbar k}\left(E - \frac{p^2}{2m}\right)\psi_E \qquad (24)$$

La soluzione è

$$\psi_E(p) = N \exp \frac{1}{i\hbar k}\left(E p - \frac{p^3}{6m}\right) \qquad (25)$$

che sostituita nella eq. (21) dà la probabilità cercata: in effetti, poiché la funzione d'onda eq. (25) è una pura fase, tale probabilità è banale:

$$P = |N|^2 \qquad (26)$$

6) Si ha, usando la eq. (25)

$$\langle x | \psi_E \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp \, \langle x | p \rangle \langle p | \psi_E \rangle =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dp \, AC \, e^{i\frac{p}{\hbar}x} \, e^{i\frac{1}{\hbar k}\left(Ep - \frac{p^3}{6m}\right)}$$

$$= 2C \int_{-\infty}^{\infty} dp \cos\left[\frac{1}{\hbar}\left(p\left(x - \frac{E}{h}\right) + \frac{p^3}{6mk}\right)\right] \qquad (27)$$

Confrontando con l'espressione data, si ha

$$\frac{p^3}{6m\kappa\hbar} = \frac{t^3}{3} \qquad (28)$$

da cui

$$t = p\left(\frac{1}{2m\hbar\kappa}\right)^{1/3} \qquad (29)$$

Cambiando variabile di integrazione (ed assorbendo la jacobiano nella costante) si ha così

$$\langle x | \psi_E \rangle = A \int_0^\infty dt \cos\left[t^3 + \left(\frac{2mk}{\hbar^2}\right)^{1/3}\left(x - \frac{E}{k}\right) t \right]$$

che è della forma desiderata, con

$$z(x) = \left(\frac{2mk}{\hbar^2}\right)^{1/3}\left(x - \frac{E}{k}\right) \qquad (30)$$

7) Il limite di $z \to \pm\infty$ coincide con il limite $x \to \pm\infty$. Quando $x \to \infty$ il potenziale è infinitamente alto. Ci si aspetta perciò che qualunque autostato di energia sia esponenzialmente smorzato, in quanto $E < V(x)$

$$\psi(x) \underset{x \to \infty}{\sim} \exp - f(x) \qquad (31)$$

dove $f(x)$ è una opportuna funzione crescente della posizione.

Quando invece $x \to -\infty$ il potenziale tende a $-\infty$, quindi qualunque autostato di energia è oscillante in quanto $E > V(x)$. Poiché la f. d'onda è manifestamente reale, si ha

$$\psi(x) \underset{x \to -\infty}{\sim} \sin\left(g(x) + \delta \right) \qquad (32)$$

dove $f(x)$ è una funzione che decresce quando $x \to -\infty$.
Si può stimare l'andamento delle $f(x)$ e $g(x)$ ~~ed $f(x)$~~ osservando che quando $x \to \pm\infty$ il termine di autovalore nell'eq. di Schrödinger stazionaria è sottodominante, e questa si

riduce quindi a

$$+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = kx\,\psi \qquad (33)$$

ossia

$$\psi'' = \frac{2mk}{\hbar^2}\, x\,\psi \qquad (34)$$

Sostituendo la forma eq. (31)-(32) nella (34) abbiamo

$$\left(f'(x)\right)^2 - f''(x) = \frac{2mk}{\hbar^2}\, x \qquad (35)$$

$$-\left(g(x)\right)^2 + g''(x)\,\mathrm{cotan}\,g(x) = \frac{2mk}{\hbar^2}\, x$$

Ora per qualunque $f(x)$ tale che sia $f(x)$ che $f'(x)$ siano funzioni crescenti di x $\left|\left(f'(x)\right)^2\right| \gg \left|f''(x)\right|$ quando $x \to \infty$. Ma la (35) implica che $f'(x)$ deve crescere con x, quindi ne deduciamo che

$$f'(x) = \sqrt{\frac{2mk}{\hbar^2}}\,\sqrt{x} \qquad (36)$$

da cui

$$f(x) \underset{x\to\infty}{\sim} x^{3/2} \qquad (37)$$

Analoghi ragionamenti portano a concludere che

$$g(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} |x|^{3/2} \qquad ; \; (38)$$