Esame scritto di fisica moderna

Traccia di soluzione

11 gennaio 2013

Esercizio 1. Calcoliamo i commutatori:

$$[H,p] = \kappa[x,p] = i\hbar\kappa, \tag{1}$$

$$[H,x] = \frac{1}{2m}[p^2,x] = \frac{1}{2m}\left\{p[p,x]+[p,x]p\right\} = -\frac{i\hbar p}{m}, \tag{2}$$

$$[H,p^2] = \kappa[x,p^2] = 2i\hbar\kappa p, \tag{3}$$

$$[H,x^2] = \frac{1}{2m}[p^2,x^2] = \frac{1}{2m}\Big([p^2,x]x + x[p^2,x]\Big) = -2\frac{i\hbar}{m}xp - \frac{\hbar^2}{m}. \tag{4}$$

Osserviamo inoltre che gli unici operatori diagonalizzabili simultaneamente sono quelli che commutano nullo, quindi nel nostro caso abbiamo $[x,V]=[p,T]=0$, mentre tutte le altre coppie di operatori non sono simultaneamente diagonalizzabili.

Esercizio 2. Gli operatori T e V (energia cinetica e potenziale) sono

$$T = \frac{p^2}{2m}, \quad V = \kappa x. \tag{5}$$

In rappresentazione di Heisenberg otteniamo:

$$\frac{dT(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H,T] = \frac{i\kappa}{2m\hbar}[x,p^2] = \frac{i\kappa}{2m\hbar}\left\{[x,p]p+[x,p]p\right\} = -\kappa\frac{p}{m}, \tag{6}$$

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H,V] = \frac{i\kappa}{2m\hbar}[p^2,x] = \frac{i\kappa}{2m\hbar}\left\{p[p,x]+[p,x]p\right\} = \kappa\frac{p}{m}. \tag{7}$$

Risolviamo il sistema in termini di $x(t)$ e $p(t)$, supponendo che $x(t_0=0)=x_s$ e $p(t_0)=p_s$:

$$\frac{dp(t)}{dt} = -\kappa \Longrightarrow p(t) = p_s - \kappa t \tag{8}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{p}{m} \Longrightarrow x(t) = x_s + \frac{p_s}{m}t - \frac{\kappa}{2m}t^2 \tag{9}$$

Quindi gli operatori $T(t)$ e $V(t)$ sono:

$$T(t) = \frac{(p_s-\kappa t)^2}{2m} = \frac{\kappa^2}{2m}t^2 - \frac{p_s\kappa}{m}t + \frac{p_s^2}{2m} \tag{10}$$

$$V(t) = \kappa x(t) = -\frac{\kappa^2}{2m}t^2 + \frac{\kappa p_s}{m}t + \kappa x_s \tag{11}$$

Osserviamo che $\dot{T}(t) = -\dot{V}(t)$. Ne segue che $H = T(t) + V(t)$ non dipende dal tempo, come si vede anche esplicitamente dalle Eq. (10-11). L'hamiltoniana non dipende dal tempo, e ciò segue dal fatto che il sistema è invariante per traslazioni temporali. Ma L'energia cinetica e l'energia potenziale non sono separatamente conservate perché nessuna delle due commuta con l'hamiltoniana.

Esercizio 3. Sia x che p dipendono dal tempo, come si vede dalle Eq. (9-8); x è conservato quando il sistema è invariante per traslazioni spaziali, ma l'hamiltoniana non lo è perché il potenziale lineare non è invariante sotto $x \to x + \delta$. Inoltre p è conservato quando il sistema è invariante sotto traslazioni dell'impulso, ma l'hamiltoniana non lo è perché il termine cinetico non è invariante sotto $p \to p + \delta$.

La trasformazione generata da x è $R_\delta = e^{ix\delta}$. La sua azione sull'hamiltoniana è, nel caso di trasformazioni infinitesime,

$$\begin{aligned}
R^{-1}HR &= \left(1 - \frac{i}{\hbar}x\delta\right)\frac{p^2}{2m}\left(1 + \frac{i}{\hbar}x\delta\right) + \left(1 - \frac{i}{\hbar}x\delta\right)\kappa x\left(1 + \frac{i}{\hbar}x\delta\right) + O(\delta^2) && (12)\\
&= H - 2\delta\frac{p}{m} + O(\delta^2) && (13)\\
&= \frac{1}{2m}(p-\delta)^2 + \kappa x + O(\delta^2). && (14)
\end{aligned}$$

L'operatore x genera traslazioni dell'impulso p.

Esercizio 4. L'equazione agli autovalori nella base degli impulsi è

$$\frac{1}{2m}\langle p|p^2|\psi_E\rangle + \kappa\langle p|x|\psi_E\rangle = E\langle p|\psi_E\rangle, \tag{15}$$

da cui, ricordano la forma dell'operatore posizione nella base degli impulsi

$$\left(\frac{p^2}{2m} + i\hbar\kappa\frac{d}{dp}\right)\psi_E(p) = E\psi_E(p) \tag{16}$$

la cui soluzione è

$$\psi_E(p) = N\exp\left[\frac{i}{\hbar\kappa}\left(\frac{p^3}{6m} - Ep\right)\right]. \tag{17}$$

Esercizio 5. Calcoliamo la dipendenza del tempo dell'operatore $A = xp$:

$$\begin{aligned}
\frac{dA(t)}{dt} &= \frac{i}{\hbar}[H, A] = \frac{i}{\hbar}\left[\frac{p^2}{2m} + \kappa x, xp\right] && (18)\\
&= \frac{i}{\hbar}\left\{\frac{1}{2m}[p^2, xp] + \kappa[x, xp]\right\} && (19)\\
&= \frac{i}{\hbar}\left\{\frac{1}{2m}[p^2, x]p + \kappa x[x, p]\right\} && (20)\\
&= \frac{i}{\hbar}\left\{\frac{1}{2m}\left\{p[p,x] + [p,x]p\right\}p + i\hbar\kappa x\right\} && (21)\\
&= \frac{i}{\hbar}\left\{-i\hbar\frac{p^2}{m} + i\hbar\kappa x\right\} && (22)\\
&= \frac{p^2}{m} - \kappa x = 2T - V && (23)
\end{aligned}$$

quindi

$$A(t) = x_s p_s + \frac{\kappa^2}{2m} t^3 - \frac{3 p_s \kappa}{2m} t^2 + \left(\frac{p_s^2}{m} - \kappa x_s \right) t \tag{24}$$

Il valor medio dato non dipende dal tempo perché il valor medio di qualunque operatore in uno autostato di energia (stato stazionario) è indipendente dal tempo:

$$\frac{d}{dt} \langle \psi_E | xp | \psi_E \rangle = 0 \tag{25}$$

(*soluzione preferita*).

Questo può anche essere verificato esplicitamente in molti modi. Ad esempio, si può notare che (ricordando la Eq. (4))

$$A = xp = \frac{mi}{2\hbar} \left([H, x^2] + \frac{\hbar^2}{m} \right). \tag{26}$$

Il valor medio del primo termine in un autostato di energia è manifestamente nullo e si trova così

$$\langle \psi_E | px | \psi_E \rangle = \frac{i\hbar}{2}, \tag{27}$$

che manifestamente non dipende dal tempo, per cui ne segue nuovamente l'Eq. (25).

Esercizio 6. La Eq. (25), assieme all'equazione di Heisenberg per l'operatore A Eq. (18), implicano che

$$\langle \psi_E | [H, xp] | \psi_E \rangle = \langle \psi_E | [H, A] | \psi_E \rangle = 0. \tag{28}$$

Calcolando esplicitamente il commutatore otteniamo

$$\langle \psi_E | \frac{p^2}{m} | \psi_E \rangle - \kappa \langle \psi_E | x | \psi_E \rangle = 0 \tag{29}$$

da cui segue

$$\langle \psi_E | T | \psi_E \rangle = \frac{1}{2} \langle \psi_E | V | \psi_E \rangle. \tag{30}$$