# Esame Scritto di Fisica Moderna
# Traccia di soluzione

26 Gennaio 2017

1. Calcoliamo i valori medi degli operatori $x$ e $x^2$ nello stato dato $|\psi\rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle\psi|x|\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\langle 0| + (1-i)\langle 1|\right]\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a^\dagger + a\right)\frac{1}{\sqrt{3}}\left[|0\rangle + (1+i)|1\rangle\right] \\
&= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left[\langle 0| + (1-i)\langle 1|\right]\Big[|1\rangle + (1+i)\sqrt{2}\,|2\rangle + (1+i)|0\rangle\Big] \\
&= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left[(1+i) + (1-i)\right] = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \qquad (1)\\
\langle\psi|x^2|\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\langle 0| + (1-i)\langle 1|\right]\frac{\hbar}{2m\omega}\left(\left(a^\dagger\right)^2 + a^\dagger a + a a^\dagger + a^2\right)\frac{1}{\sqrt{3}}\left[|0\rangle + (1+i)|1\rangle\right] \\
&= \frac{1}{3}\frac{\hbar}{2m\omega}\left[\langle 0| + (1-i)\langle 1|\right]\Big[\sqrt{2}\,|2\rangle + |0\rangle + (1+i)\sqrt{6}\,|3\rangle + 3(1+i)|1\rangle\Big] \\
&= \frac{1}{3}\frac{\hbar}{2m\omega}\left[1 + 3(1-i)(1+i)\right] = \frac{7}{3}\frac{\hbar}{2m\omega}. \qquad (2)
\end{aligned}$$

L'indeterminazione quindi è data da

$$\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = \frac{17}{18}\frac{\hbar}{m\omega}. \qquad (3)$$

2. Nel caso (a) la funzione d'onda per lo stato $\psi$ al tempo t in rappresentazione di Schrödinger è

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[|0\rangle e^{-\frac{1}{2}i\omega t} + (1+i)|1\rangle e^{-\frac{3}{2}i\omega t}\right]. \qquad (4)$$

Il valor medio della posizione in questo stato al tempo $t$ è ora quindi facilmente calcolabile come:

$$\begin{aligned}
\langle\psi(t)|x|\psi(t)\rangle &= \frac{1}{3}\sqrt{\hbar}2m\omega\left[\langle 0| e^{\frac{1}{2}i\omega t} + (1-i)|1\rangle e^{\frac{3}{2}i\omega t}\right] \\
&\qquad \left[|1\rangle e^{-\frac{1}{2}i\omega t} + (1+i)\sqrt{2}\,|2\rangle e^{-\frac{3}{2}i\omega t} + (1+i)|0\rangle e^{-\frac{3}{2}i\omega t}\right] \\
&= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left[(1+i)e^{-i\omega t} + (1-i)e^{i\omega t}\right] \\
&= \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left[\cos\omega t + \sin\omega t\right]. \qquad (5)
\end{aligned}$$

Nel caso (b) invece al tempo $t = 0$ viene eseguita una misura di energia sullo stato $\psi$. Poiché questo stato è combinazione degli autostati di energia $|0\rangle$ e $|1\rangle$ i possibili valori di questa misura con le relative probabilità saranno:

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega \qquad P_0 = \frac{1}{3} \qquad (6)$$

$$E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega \qquad P_1 = \frac{2}{3}. \qquad (7)$$

Una volta eseguita la misura il sistema si trova nel relativo autostato ($|0\rangle$ e $|1\rangle$) e poiché per ogni autostato dell'oscillatore armonico il valor medio della posizione è nullo avremo che a qualunque $t$ il valor medio dell'operatore posizione sullo stato $\psi(t)$ nel caso (b) è

$$\langle\psi(t)|x|\psi(t)\rangle = 0. \tag{8}$$

3. *Domanda di Teoria*

   Lo stato fondamentale è annichilato dall'operatore di distruzione:

$$a|0\rangle = 0. \tag{9}$$

   Nella base delle coordinate, questa condizione diventa

$$\frac{\partial\psi_0(x)}{\partial x} = -x\psi_0(x)\frac{m\omega}{\hbar}, \tag{10}$$

   la cui soluzione è

$$\psi_0(x) = N_0 \exp\left(-\frac{x^2 m\omega}{2\hbar}\right), \tag{11}$$

   cioè una gaussiana di larghezza $\frac{\hbar}{m\omega}$. La condizione di normalizzazione $\langle 0|0\rangle = 1$ fissa

$$N_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}. \tag{12}$$

4. Riscriviamo l'hamiltoniana completa nel modo seguente:

$$\begin{aligned} H = H_0 + eEx &= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + eEx \\ &= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + eEx + \frac{e^2E^2}{2m\omega^2} - \frac{e^2E^2}{2m\omega^2} \\ &= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\left(x + \frac{eE}{m\omega^2}\right)^2 - \frac{e^2E^2}{2m\omega^2} \\ &= \frac{p'^{\,2}}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x'^{\,2} - \frac{e^2E^2}{2m\omega^2}, \end{aligned} \tag{13}$$

   dove nell'ultimo passaggio abbiamo applicato la traslazione

$$x' = x + \frac{eE}{m\omega^2} \qquad\qquad p' = p. \tag{14}$$

   Lo spettro è quindi

$$E'_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{e^2E^2}{2m\omega^2}. \tag{15}$$

   Gli autostati della vecchia hamiltoniana non sono più autostati della nuova hamiltoniana in quanto essi sono creati e distrutti da nuovi operatori di creazione e distruzione $A$ e $A^\dagger$ definiti a partire dagli operatori $x'$ e $p'$ traslati nel modo seguente:

$$A = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x' + \frac{ip'}{m\omega}\right) = a + \alpha, \tag{16}$$

   dove

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right) \tag{17}$$

   e

$$\alpha = \frac{eE}{\omega\sqrt{2m\omega\hbar}}. \tag{18}$$

5. L'azione dell'operatore parità sugli autostati della posizione implica che l'operatore $\mathcal{P}$ anticommuta sia con l'operatore $x$ che con l'operatore $p$, ossia

$$\mathcal{P}x\mathcal{P}^{-1} = -x \tag{19}$$

e analogamente per $p$. Utilizzando l'espressione di $a$ Eq. (17) in termini di $x$ e $p$ ne segue che l'operatore $\mathcal{P}$ anticommuta con gli operatori di creazione e distruzione:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}a\mathcal{P}^{-1} &= -a,\\ \mathcal{P}a^\dagger\mathcal{P}^{-1} &= -a^\dagger.\end{aligned} \tag{20}$$

Usando la Eq. (11) si vede inoltre che

$$\langle x|\mathcal{P}\,|0\rangle = \psi_0(-x) = \psi_0(x) = \langle x|0\rangle \tag{21}$$

e quindi

$$\mathcal{P}\,|0\rangle = |0\rangle\,. \tag{22}$$

Ma il generico autostato $|n\rangle$ può essere ottenuto dallo stato fondamentale utilizzando l'operatore di creazione $a^\dagger$ come

$$|n\rangle = \frac{\left(a^\dagger\right)^n}{\sqrt{n!}}\,|0\rangle\,. \tag{23}$$

Usando la Eq. (20 si ottiene così

$$\begin{aligned}\psi_n(-x) = \langle x|\mathcal{P}\,|n\rangle = \langle x|\mathcal{P}\frac{\left(a^\dagger\right)^n}{\sqrt{n!}}\mathcal{P}^{-1}\mathcal{P}\,|0\rangle = \langle x|\,(-1)^n\,\frac{\left(a^\dagger\right)^n}{\sqrt{n!}}\mathcal{P}\,|0\rangle = (-1)^n\,\langle x\,|n\rangle\\ = (-1)^n\,\psi_n(x).\end{aligned} \tag{24}$$

Gli autostati dell'oscillatore armonico hanno parità definita come conseguenza del fatto che l'hamiltoniana dell'oscillatore armonico è invariante sotto parità.

6. Osserviamo che

$$e^{i\pi a^\dagger a}\,|n\rangle = e^{i\pi n}\,|n\rangle = \left(e^{i\pi}\right)^n\,|n\rangle = (-1)^n\,|n\rangle\,. \tag{25}$$

Ma quindi, usando una risoluzione dell'identità,

$$\begin{aligned}e^{i\pi a^\dagger a}|x\rangle &= \sum_n e^{i\pi a^\dagger a}|n\rangle\langle n|x\rangle\\ &= \sum_n(-1)^n|n\rangle\langle n|x\rangle &(26)\\ &= \sum_n |n\rangle\langle n|-x\rangle &(27)\\ &= |-x\rangle = \mathcal{P}|x\rangle, &(28)\end{aligned}$$

dove nel passaggio Eq. (26) abbiamo utilizzato l'azione esplicita Eq. (25) dell'operatore dato, e nel passaggio Eq. (27) abbiamo sfruttato il risultato Eq. (24) della domanda precedente.

7. L'azione dell'operatore traslazione su un autostato della posizione è

$$T_\delta|x\rangle = |x-\delta\rangle. \tag{29}$$

Ma la Eq. (14) implica immediatamente che

$$x' = T_\delta^\dagger x T_\delta = x - \delta \tag{30}$$

con
$$\delta = -(x' - x) = -\frac{eE}{m\omega^2}, \tag{31}$$
e quindi l'operatore di distruzione $A$ Eq. (16) relativo ad $H$ è dato da
$$A = T_\delta^\dagger a T_\delta = a + \alpha, \tag{32}$$
ed analogamente per l'operatore di creazione.

Ne segue che lo stato fondamentale della hamiltoniana $H_0$ si ottiene da quello della hamiltoniana $H_0$ per azione della traslazione
$$|0'\rangle = T_\delta^\dagger |0\rangle, \tag{33}$$
ossia, esplicitamente nella base delle coordinate
$$\langle x|0'\rangle = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega x'^{\,2}}{2\hbar}}. \tag{34}$$
L'azione dell'operatore di distruzione $a$ sullo stato $|0'\rangle$ è quindi
$$a|0'\rangle = aT_\delta^\dagger|0\rangle = T_\delta^\dagger T_\delta a T_\delta^\dagger |0\rangle. \tag{35}$$
D'altra parte la Eq. (32) implica
$$T_\delta a T_\delta^\dagger = a - \alpha. \tag{36}$$
Si trova così
$$a|0'\rangle = T_\delta^\dagger (a - \alpha)|0\rangle = \alpha T_\delta^\dagger |0\rangle = -\alpha|0'\rangle. \tag{37}$$
Quindi lo stato fondamentale della nuova hamiltoniana è autostato dell'operatore $a$ con autovalore $-\alpha$.