Traccia di soluzione

Fisica Moderna - 16 febbraio 2009

Lo stato dato è un pacchetto d'onde gaussiano, correttamente normalizzato

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1 \qquad (1)$$

1) Si ha

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\; x\, |\psi(x)|^2 = b\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\psi(x)|^2 +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} dx\, (x-b)\,|\psi(x)|^2 \qquad (2)$$

$$= b\,\langle\psi|\psi\rangle = b \qquad (3)$$

Infatti il 2ndo integrale a membro destro della eq.(2) è zero per simmetria

$$\langle p\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\psi(x)\right) = ma\,\langle\psi|\psi\rangle = am \qquad (4)$$

$$\langle\Delta x^2\rangle = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = \int \frac{dx\; x^2}{\sqrt{2\pi d^2}}\, e^{-\frac{(x-b)^2}{2d^2}} - b^2$$

$$= \int \frac{(x-b)^2}{\sqrt{2\pi d^2}}\, e^{-\frac{(x-b)^2}{2d^2}} = d^2 \qquad (5)$$

$$\langle\Delta p^2\rangle = \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2 = \int dx\, \psi^*(x)\, -i\hbar\frac{d}{dx}\left(ma + i\hbar\frac{(x-b)}{2d^2}\right)\psi(x)$$

$$-(am)^2 =$$

$$= \int dx\, \psi^* \left[\frac{\hbar^2}{2d^2} + \left(ma + i\hbar \frac{(x-b)}{2d^2} \right)^2 \right] \psi - (am)^2$$

$$= \frac{\hbar^2}{2d^2} + \int dx \left((ma)^2 |\psi|^2 - \frac{\hbar^2 (x-b)^2}{(2d^2)^2} |\psi|^2 \right) - (am)^2$$

$$= \frac{\hbar^2}{2d^2} - \frac{\hbar^2}{(2d^2)^2} d^2 = \frac{\hbar^2}{4d^2} \qquad (6)$$

Notare che

$$\Delta x^2 \Delta p^2 = \frac{d^2 \hbar^2}{4d^2} = \frac{\hbar^2}{4} \qquad (7)$$

$\rightarrow$ stato di minima indeterminazione.

) Le eq. del moto per gli operatori $x(t)$ e $p(t)$ alla Heisenberg sono

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{p}{m} & (8) \\[2ex] \dfrac{dp}{dt} = 0 & (9) \end{cases}$$

da cui

$$\langle p(t) \rangle = \langle p(t_0) \rangle \qquad (10)$$

$$\langle x(t) \rangle = \frac{1}{m} \langle p(t_0) \rangle (t - t_0) + \langle x(t_0) \rangle \qquad (11)$$

Si ha quindi

$$\langle x(t) \rangle = \frac{m}{m} a (t - t_0) + b = a(t - t_0) + b \qquad (12)$$

Pertanto

$$\langle x(0) \rangle = -a t_0 + b \qquad (13)$$

da cui
$$t_0 = \frac{b}{a} \qquad (14)$$

3) Si ha

$$\rho(x) = |\psi(x)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi d^2}} e^{-\frac{(x-b)^2}{2d^2}} = \rho(x,t_0) \qquad (15)$$

$$j(x) = \frac{\hbar}{2m}\left(\psi^*\left(-i\hbar\frac{d\psi}{dx}\right) + i\hbar\frac{d\psi^*}{dx}\psi\right) = j(x,t_0)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi d^2}} e^{-\frac{(x-b)^2}{2d^2}} a = a\,\rho(x,t_0) \qquad (16)$$

Eq. di continuità

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x}(x,t) = 0 \qquad (17)$$

Pertanto a $t = t_0$, $j = j(x)$ eq. (16) e

$$\frac{\partial j}{\partial x} = \frac{x-b}{d^2}\, a\, \rho(x,t_0) \qquad (18)$$

da cui

$$\left.\frac{\partial \rho}{\partial t}\right|_{t=t_0} = \frac{a(x-b)}{d^2}\rho(x,t_0) \qquad (19)$$

4) La distribuzione dei risultati della misura è che la misura dà risultato p con densità data da $|\psi(p)|^2$ dove

$$\psi(p) = \langle p|\psi\rangle = \langle p|x\rangle\langle x|\psi\rangle =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{e^{\frac{i}{\hbar}px}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \psi(x) = \qquad (20)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}px}}{(2\pi d^2)^{1/4}} \frac{e^{\frac{i a m x}{\hbar}}}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{(x-b)^2}{4d^2}} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx \; e^{-\frac{1}{4d^2}\left((x-b) + \frac{i}{\hbar}\frac{(p-am)}{2} 4d^2\right)^2}}{(2\pi d^2)^{1/4}\sqrt{2\pi\hbar}} \, e^{\frac{i}{\hbar}(p-ma)b}$$

$$\times e^{-\frac{1}{\hbar^2} 4d^2 \frac{(p-am)^2}{4}} =$$

$$= e^{\frac{i}{\hbar}pb} \, e^{-\frac{d^2}{\hbar^2}(p-am)^2} \left(\frac{2d^2}{\hbar^2 \pi}\right)^{1/4} \qquad (21)$$

Pertanto

$$\rho(p) = \sqrt{\frac{2d^2}{\pi\hbar^2}} \exp -\frac{2d^2}{\hbar^2}(p-am)^2 \qquad (22)$$

Dopo la misura il sistema si trova nell'onda piana

$$\langle p|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \frac{i}{\hbar} px \qquad (23)$$

5) Si ha

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

quindi

$$\Delta E = \frac{1}{4m^2}\left(\langle p^4\rangle - \langle p^2\rangle^2\right)$$

$$= \frac{1}{4m^2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} dp\ p^4 e^{-\frac{2d^2}{\hbar^2}(p-am)^2}\sqrt{\frac{2d^2}{\hbar^2\pi}} - \left(\frac{\hbar^2}{4d^2}+a^2m^2\right)^2\right]$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la forma eq. (21) della $\psi(p) = \langle p|\psi\rangle$ ed il valore eq. (6) di $\langle p^2\rangle$.

Si ha

$$\sqrt{\frac{2d^2}{\pi\hbar^2}}\int_{-\infty}^{\infty} dp\ p^4 e^{-\frac{2d^2}{\hbar^2}(p-am)} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dp \sqrt{\frac{2d^2}{\pi\hbar^2}}\left(p^4 + 6p^2(am)^2 + (am)^4\right) e^{-\frac{2d^2}{\hbar^2}p^2} =$$

$$= 3\left(\frac{\hbar^2}{4d^2}\right)^2 + 6\frac{\hbar^2}{4d^2}a^2m^2 + a^4m^4 \qquad (24)$$

Quindi

$$\Delta E^2 = \frac{1}{4m^2}\left(3\left(\frac{\hbar^2}{4d^2}\right)^2 - \left(\frac{\hbar^2}{4d^2}\right)^2 + \frac{6\hbar^2}{4d^2}a^2m^2 - 2\frac{\hbar^2 a^2 m^2}{4d^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2m^2}\left(\left(\frac{\hbar^2}{4d^2}\right)^2 + 2\frac{\hbar^2}{4d^2}a^2m^2\right) =$$

$$= \frac{h^2}{4 d^2} \left(\frac{\hbar^2}{8 m^2 d^2} + a^2 \right) \qquad (25)$$

Ricordando che $\Delta p^2 = \frac{\hbar^2}{4 d^2}$ si vede che le due indeterminazioni ΔE e Δp sarebbero uguali se ci fosse solo il secondo termine in parentesi nella eq. (25), infatti:

$$\left\langle \frac{\partial E}{\partial p} \right\rangle \Delta p = \frac{\langle p \rangle}{m} \frac{\hbar}{2d} = \frac{a\hbar}{2d} \,, \qquad (26)$$

avendo usato la propagazione dell'errore standard.

L'indeterminazione in E però è maggiore perché ad ogni misura di E corrispondono due possibili risultati di misure di $p = \pm \sqrt{2mE}$.