Fisica Moderna

14-2-2011

Traccia di soluzione

1) I valori medi sono dati da

$$\langle x \rangle = \langle p \rangle = 0$$

in quanto integrale di funzione dispari su dominio pari

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-a}^{a} dx \quad x^2 \; |N|^2 (a^2 - x^2)^2 =$$

$$= \int_{-a}^{a} dx \left(x^6 - 2a^2 x^4 + a^4 x^2 \right) |N|^2 =$$

$$= |N|^2 \left(\frac{1}{7} 2a^7 - \frac{2}{5} 2a^7 + \frac{1}{3} 2a^7 \right) =$$

$$= |N|^2 \frac{16}{105} a^7 \qquad (1)$$

$$\langle p^2 \rangle = \int_{-a}^{a} dx \; |N|^2 (a^2 - x^2)(\hbar^2)\, 2 =$$

$$= 2\hbar^2 |N|^2 \left(\frac{1}{3} 2a^3 - 2a^3 \right) = \frac{8}{3} \hbar^2 |N|^2 a^3 \qquad (2)$$

Calcolo della normalizzazione (non richiesto)

$$\int_{-a}^{a} |N|^2 (a^2 - x^2)^2 = |N|^2 \left(2a^5 - 4\frac{a^5}{3} + \frac{2a^5}{5} \right) =$$

$$= |N|^2 \frac{16}{15} a^5 \qquad (3)$$

$$N = \sqrt{\frac{15}{16a^5}}$$

2) Nella regione in cui $\psi(x) \neq 0$, la hamiltoniana si riduce all'hamiltoniana di particella libera

$$H = \frac{p^2}{2m}.$$

Pertanto

$$\langle H \rangle = \frac{1}{2m} \langle p^2 \rangle = \frac{4}{3m} \hbar^2 |N|^2 a^3 \qquad (4)$$

(usando la eq. (2)).

Utilizzando il suggerimento, si ha che

$$\langle H^2 \rangle = \langle \psi | H \, H | \psi \rangle \qquad (5)$$

Ma $\langle x | H | \psi \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = \frac{2\hbar^2}{2m} N \qquad (6)$

Quindi $\langle H^2 \rangle = \int_{-a}^{a} dx \, \langle \psi | H | x \rangle \langle x | H | \psi \rangle$

$$= |N|^2 \frac{8 a \hbar^4}{4 m^2} = |N|^2 \frac{2 a \hbar^4}{m^2} \qquad (7)$$

$$\Delta^2 H = \langle H^2 \rangle - |\langle H \rangle|^2 = \frac{|N|^2 \hbar^4}{m^2} \left(2a - \frac{16}{9} a^6 |N|^2 \right) \qquad (8)$$

3) Le funzioni d'onda dello stato fondamentale e del primo stato eccitato sono rispettivamente

stato fondamentale $\quad \psi_1(x) = \bar{N} \cos \frac{\pi}{2a} x$

1° stato eccitato $\quad \psi_2(x) = \bar{N} \sin \frac{\pi}{a} x \qquad (9)$

con $\quad \bar{N} = \sqrt{\frac{1}{a}}$

Pertanto la probabilità che una misura di energia dia E_1 è

$$P_1 = |\langle \psi_1 | \psi \rangle|^2$$

$$\langle \psi_1 | \psi \rangle = N\bar{N} \int_{-a}^{a} dx \cos\frac{\pi}{2a}x \, (x^2 - a^2) =$$

$$= N\bar{N} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx' \, \frac{2a}{\pi} \cos x' \left(\left(\frac{2a}{\pi}\right)^2 x'^2 - a^2 \right) =$$

$$= N\bar{N} \left(\frac{8a^3}{\pi^3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx \, x^2 \cos x - \frac{2a^3}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx \cos x \right)$$

$$= N\bar{N} \left(\frac{8a^3}{\pi^3} \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 2 - 4 \right) - \frac{4a^3}{\pi} \right) =$$

$$= N\bar{N} a^3 \left(\cancel{\frac{1}{\pi} 4} - \cancel{\frac{4}{\pi}} - \frac{32}{\pi^3} \right) =$$

$$= - N\bar{N} \, a^3 \frac{32}{\pi^3} \qquad (10)$$

Mentre la probabilità che dia E_2 è

$$P_2 = |\langle \psi_2 | \psi \rangle|^2$$

$$\langle \psi_2 | \psi \rangle = N\bar{N} \int_{-a}^{a} dx \, \sin\frac{\pi}{a} x \, (x^2 - a^2) = 0 \qquad (11)$$

per simmetria.

4) Se la misura di energia rivela il sistema nello stato fondamentale la sua funzione d'onda al tempo t è data da

$$\psi_1(x,t) = e^{\frac{1}{i\hbar}E_0 t}\,\psi_1(x) \qquad (12)$$

dove $\psi_1(x)$ è data dalla Eq. (10) mentre

$$E_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{8ma^2} \qquad (13)$$

5) La funzione d'onda al tempo t può essere scritta come

$$\langle x|\psi,t\rangle = \langle x|S(t)|\psi\rangle =$$

$$= \sum_n \langle x|S(t)|n\rangle\langle n|\psi\rangle =$$

$$= \sum_n e^{\frac{1}{i\hbar}E_n t}\,\langle n|\psi\rangle \qquad (14)$$

dove $|n\rangle$ sono autostati di energia. Pertanto la probabilità che una misura riveli il sistema in uno autostato di energia al tempo t è

$$P_n(t) = \left| e^{\frac{1}{i\hbar}E_n t}\langle n|\psi\rangle \right|^2 = |\langle n|\psi\rangle|^2. \qquad (15)$$

Pertanto le probabilità non dipendono dal tempo e quindi il risultato del punto 3 resta inalterato.

6) Nella rapp. delle coordinate $p^4 \to -\hbar^4 \frac{d^4}{dx^4}$ quindi potrebbe sembrare che $\langle x|p^4|\psi\rangle = 0$, in contraddizione con la Eq. (5).

Tuttavia osserviamo che la funzione d'onda è in realtà

$$\psi(x) = \begin{cases} N(a^2 - x^2) & \text{se } |x| \leq a \\ 0 & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \quad (16)$$

ossia

$$\psi(x) = N(a^2 - x^2)\, \Theta(a+x)\, \Theta(a-x) \quad (17)$$

dove

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad (18)$$

e

$$\frac{d}{dx}\Theta(x) = \delta(x) \quad (19)$$

Pertanto

$$\frac{d\psi}{dx} = N\Big((-2x)\, \Theta(a+x)\, \Theta(a-x) + (a^2 - x^2)\, \delta(a+x)\, \Theta(a-x) - (a^2 - x^2)\, \delta(a-x)\, \Theta(a+x)\Big) \quad (20)$$

$$= -2xN\, \Theta(a+x)\, \Theta(a-x)$$

dove gli altri due termini in parentesi si annullano in quanto sono della forma $x f(x)$.

Pertanto $\frac{d^4\psi}{dx^4} \neq 0$. I termini di discontinuità (termini di bordo) sono indispensabili affinché p^4 si comporti come un operatore hermitiano, ossia affinché la derivata possa essere fatta per parti. Calcolando

$$\int_{-a}^{a} dx\, \psi_0(x) \frac{d^4}{dx^4} \psi_0(x) = -\int_{-a}^{a} dx\, \frac{d\psi_0}{dx} \frac{d^3\psi_0}{dx^3}$$

$$= \int_{-a}^{a} dx\, \frac{d^2\psi}{dx^2} \frac{d^2\psi}{dx^2} \qquad (21)$$

si riottiene quindi la eq. (5)