ESAME SCRITTO DI FISICA MODERNA

11 febbraio 2019

Traccia di soluzione

(1) Abbiamo che

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[a, H_\lambda] = -i(\omega a + \lambda)\,, \tag{1}$$

(2) Imponendo l'uguaglianza

$$\hbar\omega a^\dagger a + \hbar\lambda(a + a^\dagger) = \hbar\omega(a^\dagger + \delta)(a + \delta) + K \tag{2}$$

e risolvendo, si ottiene

$$\delta = \frac{\lambda}{\omega} \quad K = -\hbar\frac{\lambda^2}{\omega}\,. \tag{3}$$

pertanto H_λ in termini di $\bar{a}$ e $\bar{a}^\dagger$ ha, a meno di una costante additiva, la forma della consueta hamiltoniana di oscillatore armonico, proporzionale all'operatore numero $N = \bar{a}^\dagger\bar{a}$. Lo spettro è completamente determinato dalle relazioni di commutazione degli operatori $\bar{a}^\dagger$, $\bar{a}$, che coincidono con quelle dei consueti operatori di creazione e distruzione per l'oscillatore armonico, ed e quindi è dato dagli interi non-negativi.

Pertanto, lo spettro è

$$E_{\bar{n}} = \hbar\omega\left(\bar{n} - \frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)\,, \tag{4}$$

dove $\bar{n}$ è un intero non negativo.

(4)Visto che H_λ in termini di $\bar{a}$ e $\bar{a}^\dagger$ ha la forma di una hamiltoniana di oscillatore armonico a meno di una costante additiva, l'equazione del moto soddisfatta da $\bar{a}$ è quella del consueto operatore di distruzione, come possiamo anche verificare con il calcolo esplicito:

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \frac{da}{dt} = -i(\omega(\bar{a} - \delta) + \lambda) = -i\omega a\,. \tag{5}$$

La nota soluzione è

$$\bar{a}(t) = e^{-i\omega t}\,\bar{a}(0)\,, \tag{6}$$

(5) L'operatore $a(t)$ a tutti i tempi si trova facilmente sfruttando il fatto che se $\bar{a}$ e a differiscono per una costante additiva indipendente dal tempo la loro derivata rispetto al tempo è uguale. Sostituendo nella soluzione Eq. (6) troviamo

$$a(t) = \bar{a}(t) - \delta = e^{-i\omega t}\,\bar{a}(0) - \delta = e^{-i\omega t}a(0) + \delta(e^{-i\omega t} - 1)\,. \tag{7}$$

È facile verificare esplicitamente che questa soluzione soddisfa l'Equazione del moto (1).

(6) Si veda ad esempio il libro di testo Sez. (8.3).

(7) Al tempo $t = 0$, $H = H_0$, cioè la hamiltoniana è proporzionale all'operatore numero $N = a^\dagger a$.

Pertanto l'energia $E = 0$ corrisponde allo stato fondamentale $|0\rangle$ di N e H_0. Notiamo che questo però non è lo stato fondamentale di H_λ, da cui differisce per una traslazione. Si ha infatti

$$\langle 0|x|0\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle 0|a + a^\dagger + 2\delta|0\rangle = \delta\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\,, \tag{8}$$

$$\langle 0|p|0\rangle = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\langle 0|a^\dagger - a|0\rangle = 0\,, \tag{9}$$

$$\langle 0|x^2|0\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\langle 0|\left((a+\delta) + (a^\dagger + \delta)\right)^2|0\rangle = \cdots = \frac{\hbar}{2m\omega}(1 + 4\delta^2) \Rightarrow \Delta x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} \tag{10}$$

$$\Delta p^2 = \langle 0|p^2|0\rangle = -\frac{m\hbar\omega}{2}\langle 0|\left((a^\dagger - \delta) - (a - \delta)\right)^2|0\rangle = \cdots = \frac{m\hbar\omega}{2}\,. \tag{11}$$

Si vede quindi che $\Delta^2 x \Delta^2 p = \hbar^2/4$, e dunque lo stato dato è di minima indeterminazione, consistentemente con il fatto che si tratta di uno stato fondamentale di oscillatore armonico. Gli operatori x e p sono quindi gli operatori posizione e impulso di un oscillatore armonico traslato.
(8) Per $t > 0$ abbiamo che

$$x(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\bar{a}(t) + \bar{a}^\dagger(t)\right) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(e^{-i\omega t}\bar{a}(0) + e^{i\omega t}\bar{a}^\dagger(0)\right)\,, \tag{12}$$

$$p(t) = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(\bar{a}(t) - \bar{a}^\dagger(t)\right) = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(e^{i\omega t}\bar{a}^\dagger(0) + e^{-i\omega t}\bar{a}(0)\right)\,, \tag{13}$$

scrivendo $\bar{a}$ e $\bar{a}^\dagger$ in termini di x e p abbiamo

$$\bar{a}(0) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x(0) + \frac{ip(0)}{m\omega}\right)\,, \tag{14}$$

$$\bar{a}^\dagger(0) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x(0) - \frac{ip(0)}{m\omega}\right)\,, \tag{15}$$

da cui si ottiene

$$x(t) = x(0)\,\cos(\omega t) + \frac{p(0)}{m\omega}\,\sin(\omega t)\,, \tag{16}$$

$$p(t) = p(0)\,\cos(\omega t) - m\omega x(0)\,\sin(\omega t)\,, \tag{17}$$

(9) Abbiamo che

$$\bar{a}|0\rangle = (a + \delta)|0\rangle = \delta|0\rangle\,, \tag{18}$$

l'autovalore è quindi pari a δ.
(9) Al tempo $t = 0$ abbiamo che

$$P_n = |\langle\bar{n}|0\rangle|^2 \tag{19}$$

dove l'ampiezza di transizione è data da

$$\langle\bar{n}|0\rangle = \langle\bar{0}|\frac{(\bar{a})^{\bar{n}}}{\sqrt{\bar{n}!}}|0\rangle = \langle\bar{0}|\frac{\delta^{\bar{n}}}{\sqrt{\bar{n}!}}|0\rangle = \frac{\delta^{\bar{n}}}{\sqrt{\bar{n}!}}|\langle\bar{0}|0\rangle|^2\,. \tag{20}$$

Il calcolo del prodotto scalare $\langle\bar{0}|0\rangle$ non è richiesto, esso è pari a $\langle\bar{0}|0\rangle = exp - \frac{1}{2}\delta^2$ (si veda la Eq. (8.124) del libro di testo). Lo stato $\bar{n}$ è autostato dell'hamiltoniana H_λ: si tratta pertanto di uno stato stazionario, quindi P_n è indipendente da t.