ESAME SCRITTO DI FISICA MODERNA

27 febbraio 2019

Traccia di soluzione

(1) La più generale forma degli stati è

$$|\psi\rangle = Ae^{i\alpha}|2\rangle\,, \tag{1}$$

$$|\phi\rangle = Be^{i\beta}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}e^{i\gamma}|2\rangle\right) \tag{2}$$

con A, B, α, β e γ parametri reali.

(2) Lo stato $|\psi\rangle$ dipende da due parametri reali non osservabili (la costante di normalizzazione A e la fase arbitraria α). Lo stato $|\phi\rangle$ dipende da due parametri reali non osservabili (la costante di normalizzazione B e la fase arbitraria β) e da un parametro reale misurabile (la fase relativa γ).

(3) Fissiamo $A = B = 1$ e $\alpha = \beta = 0$. La probabilità richiesta è pari a

$$|\langle\psi|\phi\rangle|^2 = \frac{2}{3}\,. \tag{3}$$

Essa è univocamente determinata in quanto lo stato $|\psi\rangle$ coincide con l'autostato $|2\rangle$.

(4) Sia $P|\phi\rangle = \lambda|\phi\rangle$. Gli operatori P e O sono compatibili se ammettono una base comune di autostati. Ma $|\phi\rangle$ è autostato di P e non è autostato di O e quindi P ed O non hanno una base di autostati comune. Si osserva che se l'operatore P avesse avuto spettro degenere sarebbe stato proporzionale all'operatore identità e sarebbe stato quindi compatibile con O (ogni stato è autostato dell'operatore identità e P e O avrebbero avuto una base comune di autostati).

(5) I valori medi richiesti sono

$$\langle O\rangle_\phi = \langle\phi|O|\phi\rangle = \langle\phi|\left(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|\right)|\phi\rangle = \cdots = -\frac{1}{3}, \tag{4}$$

$$\langle O\rangle_\psi = \langle\psi|O|\psi\rangle = \langle\psi|\left(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|\right)|\psi\rangle = \cdots = -1, \tag{5}$$

mentre le indeterminazioni si ottengono calcolando

$$\langle O^2\rangle_\phi = \langle\phi|O^2|\phi\rangle = \cdots = 1, \tag{6}$$

$$\langle O^2\rangle_\psi = \langle\psi|O^2|\psi\rangle = \cdots = 1. \tag{7}$$

da cui

$$\Delta^2_\phi O = \langle O^2\rangle_\phi - \langle O\rangle^2_\phi = \frac{8}{9} \qquad \Delta^2_\psi O = \langle O^2\rangle_\psi - \langle O\rangle^2_\psi = 0 \tag{8}$$

(6) Si veda ad esempio il testo Sez. (3.2.2).

(7) Abbiamo che

$$H = E\left(|1\rangle\langle 1| + \sqrt{2}(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|)\right) , \tag{9}$$

per cui

$$\langle i|H|j\rangle = E\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} . \tag{10}$$

Diagonalizzando l'hamiltoniana otteniamo gli autovalori $\lambda_+ = 2E$ e $\lambda_- = -E$ e gli autostati

$$|+\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle\right) , \tag{11}$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|1\rangle - \sqrt{2}|2\rangle\right) . \tag{12}$$

Gli operatori O e H non sono quindi compatibili (si veda la discussione al punto 4)).

(8) Dalle Eq. (11) e (12) otteniamo

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}|+\rangle + |-\rangle\right) , \tag{13}$$

$$|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|+\rangle - \sqrt{2}|-\rangle\right) . \tag{14}$$

Definiamo

$$|\xi\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|1\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}|+\rangle + |-\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(e^{-2i\omega t}\sqrt{2}|+\rangle + e^{i\omega t}|-\rangle\right) , \tag{15}$$

dove $\omega = E/\hbar$. La probabilità richiesta è pari a

$$|\langle\psi|\xi\rangle|^2 = \cdots = \frac{4}{9}\left(1 - \cos(3\omega t)\right) . \tag{16}$$

(9) La probabilità richiesta è indipendente da t se $|\phi\rangle$ è un autostato dell'hamiltoniana associato all'autovalore E_ϕ perché in tal caso

$$\langle\phi|e^{\frac{1}{i\hbar}Ht}\xi\rangle = e^{\frac{1}{i\hbar}E_\phi t}\langle\phi|\xi\rangle \tag{17}$$

il cui modulo quadro non dipende dal tempo. Se $\gamma = \pi$ abbiamo che $|\phi\rangle = |-\rangle$ e quindi

$$|\langle -|\xi\rangle|^2 = \frac{1}{3} , \tag{18}$$

La scelta fissa quindi univocamente lo stato $|\phi\rangle$.

(10) Se sappiamo che il sistema è in un autostato dell'energia i risultati delle misure fissano univocamente la fase γ nell'Eq. (1) in quanto lo stato $|\phi\rangle$ deve coincidere con lo stato $|-\rangle$. In tal caso la matrice densità è pari a

$$\rho = |-\rangle\langle -| . \tag{19}$$

Una miscela statistica che dà gli stessi risultati delle misure dell'osservabile O è, ad esempio, quella data dalla matrice densità

$$\rho = \frac{1}{3}|1\rangle\langle 1| + \frac{2}{3}|2\rangle\langle 2| . \tag{20}$$