Esame di Fisica Moderna: Soluzioni

19 Giugno 2008

1. Data l'Hamiltoniana $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} - ax$, l'evoluzione degli operatori x, x^2, p e p^2 è determinata dall'equazione di Heisenberg:
$$\frac{d\mathcal{O}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left[\mathcal{O}, \mathcal{H}\right]. \tag{1}$$
Per gli operatori impulso e posizione si ottiene dunque:
$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{1}{i\hbar}\left[x, \frac{p^2}{2m}\right] = \frac{1}{i\hbar}\frac{p}{m}(i\hbar) = \frac{p}{m} \\
\frac{dx^2}{dt} &= \frac{1}{i\hbar}\left[x^2, \frac{p^2}{2m}\right] = \frac{1}{i\hbar}\left(x\left[x, \frac{p^2}{2m}\right] + \left[x, \frac{p^2}{2m}\right]x\right) = \frac{1}{m}(xp + px) \\
\frac{dp}{dt} &= \frac{1}{i\hbar}\left[p, -ax\right] = a \\
\frac{dp^2}{dt} &= \frac{1}{i\hbar} = \frac{1}{i\hbar}\left(p[p, -ax] + [p, -ax]p\right) = 2ap
\end{aligned} \tag{2}$$

2. In un pacchetto d'onda gaussiano:
$$\psi(p) = \langle p|\psi\rangle = \mathcal{N}\, e^{-\frac{p^2}{4\Delta^2}} \tag{3}$$
è immediato verificare che i valori medi di posizione e impulso sono entrambi nulli:
$$\begin{aligned}
\langle x\rangle &= \langle\psi|x|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, \langle\psi|p\rangle\langle p|x|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, \psi^\star(p)\left(i\hbar\frac{d}{dp}\right)\psi(p) = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, \mathcal{N}\, i\hbar\left(-\frac{p}{2\Delta^2}\right) e^{-\frac{p^2}{2\Delta^2}} = 0
\end{aligned} \tag{4}$$
perché la funzione integranda è dispari. Analogamente per l'impulso si ottiene:
$$\langle p\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, p\, \mathcal{N} e^{-\frac{p^2}{2\Delta^2}} = 0. \tag{5}$$
Ne segue immediatamente che le indeterminazioni sono date da $\langle(\Delta p)^2\rangle = \langle p^2\rangle$ e $\langle(\Delta x)^2\rangle = \langle x^2\rangle$. Si ha quindi
$$\begin{aligned}
\langle\Delta p^2\rangle &= \langle p^2\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, p^2\, \mathcal{N} e^{-\frac{p^2}{2\Delta^2}} = \Delta^2 \\
\langle\Delta x^2\rangle &= \langle x^2\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, \hbar^2\left(\frac{d\psi(p)}{dp}\right)^2 = \left(\frac{\hbar}{2\Delta^2}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, p^2\, \mathcal{N} e^{-\frac{p^2}{2\Delta^2}} = \frac{\hbar^2}{4\Delta^2}
\end{aligned} \tag{6}$$

3. L'evoluzione temporale è data dall'operatore:

$$S(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}t\right). \tag{7}$$

Si ha quindi

$$\psi(p,t) = \langle p|S(t)|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dp\ \langle p|\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}t\right)|p'\rangle\psi(p').$$

Nota: $|p\rangle$ indica un autostato dell'impulso, cioè uno stato tale che $p|p\rangle = p|p\rangle$. La soluzione può essere scritta equivalentemente in termini dello stato $|k\rangle$ tale che $p|k\rangle = \hbar k|p\rangle$. Lo stato $|p\rangle$ e lo stato $|k\rangle$ differiscono esclusivamente per la normalizzazione.

Sviluppando l'operatore di evoluzione temporale si ottiene:

$$\begin{aligned}
\langle p|\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}t\right)|p'\rangle &= \langle p|\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\left[\frac{p^2}{2m}-ax\right]t\right)|p'\rangle = \\
&= \delta(p-p') - \frac{it}{\hbar}\left[\frac{p^2}{2m} - i\hbar a\frac{d}{dp}\right]\delta(p-p') + \\
&-\frac{t^2}{\hbar^2}\int_{-\infty}^{+\infty} dp''\ \left(\left[\frac{p^2}{2m} - ia\hbar\frac{d}{dp}\right]\delta(p-p'')\right)\left(\left[\frac{p^2}{2m} - ia\hbar\frac{d}{dp'}\right]\delta(p''-p')\right) + \cdots = \\
&= \left\{1 - \frac{it}{\hbar}\left[\frac{p^2}{2m} - i\hbar a\frac{d}{dp}\right] - \frac{t^2}{\hbar^2}\left[\frac{p^2}{2m} - ia\hbar\frac{d}{dp}\right]\left[\frac{p^2}{2m} - ia\hbar\frac{d}{dp}\right] + \ldots\right\}\delta(p-p'). \qquad (8)
\end{aligned}$$

È facile convincersi che tale struttura si ripete a tutti gli ordini in t, pertanto è possibile esponenziare la serie ottenendo:

$$\langle p|\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\left[\frac{p^2}{2m}-ax\right]t\right)|p'\rangle = \exp\left[-\frac{it}{\hbar}\left(\frac{p^2}{2m} - i\hbar a\frac{d}{dp}\right)\right]\delta(p-p') \tag{9}$$

L'evoluzione dello stato ψ può quindi essere scritta come

$$\psi(p,t) = \exp\left[-\frac{it}{\hbar}\left(\frac{p^2}{2m} - i\hbar a\frac{d}{dp}\right)\right]\psi(p,0) \tag{10}$$

dove $\psi(p,0) = \psi(p)$ è lo stato iniziale.

4. Dalle equazioni di Heisenberg si ottiene che l'evoluzione dei valori medi di posizione e impulso soddisfano le equazioni classiche del moto (teorema di Ehrenfest). Indicando con $\langle\cdot\rangle$ il valor medio sullo stato iniziale ψ si ha:

$$\begin{aligned}
\langle p\rangle &= \langle p_S + at\rangle = at & (11)\\
\langle x\rangle &= \langle x_S + \frac{1}{m}p_S t + \frac{1}{2}\frac{a}{m}t^2\rangle = \frac{1}{2}\frac{a}{m}t^2 & (12)
\end{aligned}$$

dove x_S ed p_S sono gli operatori posizione e impulso in rappresentazione di Schrödinger che forniscono le condizioni iniziali per l'evoluzione in rappresentazione di Heisenberg.

Per calcolare le indeterminazioni, sostituiamo le eq. (11-12) nella eq. (2). Per la posizione si ha

$$\begin{aligned}
\left\langle\frac{dx^2}{dt}\right\rangle &= \frac{1}{m}\left\langle(p_S+at)(x_S + \frac{1}{m}p_S t + \frac{1}{2}\frac{a}{m}t^2) + (x_S + \frac{1}{m}p_S t + \frac{1}{2}\frac{a}{m}t^2)(p_S+at)\right\rangle = \\
&= \frac{1}{m}\langle x_S p_S + p_S x_S + \frac{2}{m}p_S^2 t + \frac{a^2}{m}t^3\rangle. \qquad (13)
\end{aligned}$$

Notare che tutti i termini lineari in x_S e p_S si annullano nello stato dato. Infatti $\langle x_S \rangle = \langle p_S \rangle = 0$ per le eq. (4-5), mentre $\langle x_S p_S + p_S x_S \rangle$ è nullo poiché:

$$\langle x_S p_S + p_S x_S \rangle = 2\mathrm{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \, \left(i\hbar \frac{d\psi(p)}{dp} \right)^{\star} p\psi(p) = 0 \tag{14}$$

dal momento che lo stato gaussiano è reale e la funzione integranda è moltiplicata per i.

L'indeterminazione su x è quindi

$$\langle \Delta x^2 \rangle = \left\langle x^2 \right\rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{\hbar^2}{4\Delta^2} + \frac{t^2 \Delta^2}{m^2}. \tag{15}$$

Ne segue che al passare del tempo il pacchetto si allarga.

Per l'indeterminazione in p si ha:

$$\left\langle \frac{dp^2}{dt} \right\rangle = \langle 2a(p_S + at) \rangle = 2a^2 t \tag{16}$$

che implica

$$\langle \Delta p^2 \rangle = \left\langle p^2 \right\rangle - \langle p \rangle^2 = \Delta^2 \tag{17}$$

ovvero l'evoluzione temporale non modifica l'indeterminazione sull'impulso.

5. Il principio di indeterminazione di Heisenberg per l'operatore posizione al tempo iniziale (x_S) e al tempo t ($x(t)$) stabilisce la disuguaglianza:

$$\langle \Delta x_S^2 \rangle \langle \Delta x(t)^2 \rangle \geq \frac{1}{4} |\langle [x_S, x(t)] \rangle|^2 \tag{18}$$

dove il commutatore di x a tempi diversi può essere determinato sfruttando le soluzioni delle equazioni del moto calcolate al punto precedente:

$$[x_S, x(t)] = \left[x_S, x_S + \frac{1}{m} p_S t + \frac{1}{2} \frac{a}{m} t^2 \right] = \frac{t}{m} [x_S, p_S] = i\hbar \frac{t}{m}. \tag{19}$$

Si ottiene quindi:

$$\langle \Delta x_S^2 \rangle \langle \Delta x(t)^2 \rangle \geq \frac{t^2}{4m^2} \hbar^2. \tag{20}$$

Questo vincolo implica che l'indeterminazione al tempo t è inversamente proporzionale all'indeterminazione iniziale. Se viene eseguita una misura di posizione al tempo iniziale, dopo la misura l'indeterminazione sulla posizione è nulla e perciò l'indeterminazione a tempi successivi diverge (diventa infinita).

Si può ottenere la stessa conclusione sfruttando il calcolo del punto precedente. Infatti, effettuare una misura di posizione sul sistema al tempo $t = 0$ equivale a considerare come stato iniziale un pacchetto d'onda fortemente localizzato in un punto come lo stato gaussiano del punto 2 nel limite $\Delta \to \infty$ (che converge nel senso delle distribuzioni ad una delta di Dirac). Ritroviamo quindi che, dall'equazione (15),

$$\langle \Delta x^2 \rangle = \left\langle x^2 \right\rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{\hbar^2}{4\Delta} + \frac{t^2 \Delta^2}{m^2}, \tag{21}$$

l'indeterminazione in x ad un tempo arbitrariamente prossimo a $t = 0$ diverge per $\Delta \to \infty$. Questo risultato mostra come nell'istante in cui il sistema viene lasciato evolvere, qualunque informazione sulla precedente localizzazione spaziale del pacchetto viene persa.

6. Ricaviamo la forma esplicita della funzione d'onda $\psi(p,t)$ sfruttando la formula di Baker-Campbell-Hausdorff:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp' \langle p| \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\left[\frac{p^2}{2m} - ax\right]\right)|p'\rangle\psi(p') = \int_{-\infty}^{+\infty} dp' \langle p| e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}t} e^{\frac{i}{\hbar}axt} e^{\frac{i}{\hbar}\frac{a}{2m}p't^2}|p'\rangle\psi(p') =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dp' |e^{-at\frac{d}{dp}}\delta(p-p')\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}t} e^{\frac{i}{\hbar}\frac{a}{2m}p't^2}\psi(p') = \int_{-\infty}^{+\infty} dp' \langle p-at|p'\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}t} e^{\frac{i}{\hbar}\frac{a}{2m}p't^2}\psi(p') =$$
$$= e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}t} e^{\frac{i}{\hbar}\frac{a}{2m}(p-at)t^2}\psi(p-at) \tag{22}$$

Lo stato iniziale gaussiano al tempo t diventa pertanto

$$\psi(p,t) = \exp\frac{i}{\hbar}\left[-\frac{p^2}{2m}t + \frac{a}{2m}(p-at)t^2\right]\psi(p-at). \tag{23}$$

Questo stato è uno stato in cui il valor medio dell'impulso è stato traslato di una quantità at, in accordo con l'equazione del moto eq. (11). Inoltre, lo stato contiene un termine di onda piana che fa sìche il valor medio della posizione sia nonnullo, e dato dal coefficiente di ip nell'onda piana, ossia $\frac{1}{2m}at^2$, in accordo con l'equazione del moto eq. (12). L'allargamento del pacchetto eq. (15) è infine manifestato dal fatto che il coefficiente del termine quadratico nella gaussiana acquisti una parte immaginaria.