1) L'operatore $x$ si può esprimere in termini di operatori di creazione e distruzione come

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a + a^{\dagger}\right) \quad . \qquad (1)$$

Si ha

$$\langle\psi| x |\psi\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{1}{3}}\Big(\langle 0|a|1\rangle + \langle 1|a^{\dagger}|0\rangle\Big) \qquad (2)$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\;\frac{2}{3} \qquad (3)$$

dove si è fatto uso degli elementi di matrice

$$\langle 0|a|1\rangle = \langle 1|a^{\dagger}|0\rangle = 1 \qquad (4)$$

Inoltre

$$\langle\psi| x^2 |\psi\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\langle\psi|(a + a^{\dagger})(a + a^{\dagger})|\psi\rangle =$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega}\langle\psi|(a\,a^{\dagger} + a^{\dagger}a)|\psi\rangle \qquad (5)$$

infatti

$$\langle 0|a\,a|0\rangle = \langle 0|a^{\dagger}a^{\dagger}|0\rangle = \langle 1|a\,a|1\rangle = \langle 1|a^{\dagger}a^{\dagger}|1\rangle$$
$$= \langle 0|a\,a|1\rangle = \langle 0|a^{\dagger}a^{\dagger}|1\rangle = \langle 1|a\,a|0\rangle = \langle 1|a^{\dagger}a^{\dagger}|0\rangle = 0$$

in seguito al fatto che gli operatori $aa$ ed $a^\dagger a^\dagger$ hanno elementi di matrice non nulli esclusivamente tra stati la cui energia differisce di <u>due</u> unità, in unità di $\hbar\omega$.

Pertanto

$$\langle\psi|x^2|\psi\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\langle\psi|\left(2a^\dagger a+1\right)|\psi\rangle$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega}\langle\psi|\left(3\sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|0\rangle\right) =$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\frac{1}{3} + 3\,\frac{2}{3}\right) = \frac{\hbar}{2m\omega}\,\frac{7}{3} = \frac{7\hbar}{6m\omega} \qquad (6)$$

L'indeterminazione è quindi

$$\Delta_x^2 = \langle\psi|x^2|\psi\rangle - \left(\langle\psi|x|\psi\rangle\right)^2 = \frac{\hbar}{m\omega}\left(\frac{7}{6} - \frac{4}{9}\right) = \qquad (7)$$

$$= \frac{\hbar}{m\omega}\,\frac{21-8}{18} = \frac{13}{18}\,\frac{\hbar}{m\omega}$$

2) Ad un tempo qualunque $t$ lo stato $|\psi\rangle$ diventa

$$|\psi;t\rangle = e^{\frac{1}{i\hbar}E_0 t}\sqrt{\frac{1}{3}}\,|0\rangle + e^{\frac{1}{i\hbar}E_1 t}\sqrt{\frac{2}{3}}\,|1\rangle =$$

$$= e^{\frac{1}{i\hbar}\frac{\hbar\omega t}{2}}\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\,|0\rangle + e^{\frac{1}{i\hbar}\hbar\omega t}\sqrt{\frac{2}{3}}\,|1\rangle\right)$$

$$= e^{-\frac{i}{2}\omega t}\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\,|0\rangle + e^{-i\omega t}\sqrt{\frac{2}{3}}\,|1\rangle\right) \qquad (8)$$

Quindi il valor medio della posizione è

$$\langle x(t)\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\frac{\sqrt{2}}{3}\left(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\,\frac{2}{3}\cos\omega t \qquad (9)$$

3)

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[a, H] = \frac{\hbar\omega}{i\hbar}[a, a^{+}a] = -i\omega\,[a, a^{+}]a$$

$$= -i\omega a \qquad (10)$$

visto che $[a, a^{+}] = +1$

Pertanto

$$\frac{da^{+}}{dt} = i\omega a \qquad (11)$$

Le eq. (8-9) hanno ovviamente la soluzione

$$a_H(t) = e^{-i\omega t} a_S$$

$$a_H^+(t) = e^{i\omega t} a_S^+$$

dove $a_S = a_H(0)$ (14)

4) Usando la eq. (1) si ha

$$x(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a_S e^{-i\omega t} + a_S^+ e^{i\omega t}\right) \qquad (15)$$

Usando la eq. (3) del testo del problema nella eq. (15) si ha inoltre

$$x(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right)e^{-i\omega t} + \left(\frac{x - ip}{m\omega}\right)e^{i\omega t}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(x_S + \frac{ip_S}{m\omega}\right)(\cos\omega t - i\sin\omega t) + \right.$$

$$\left. + \left(x_S - \frac{ip_S}{m\omega}\right)(\cos\omega t + i\sin\omega t)\right] =$$

$$= x_S \cos\omega t + \frac{p_S}{m\omega}\sin\omega t \qquad (16)$$

Il commutatore richiesto è quindi

$$[x(t), x(0)] = \left[x_s \cos\omega t + \frac{p_s}{m\omega} \sin\omega t, \ x_s\right]$$

$$= -\frac{i\hbar}{m\omega} \sin\omega t \qquad (17)$$

Il fatto che gli operatori posizione a tempi diversi non commutino significa che un sistema preparato in un autostato della posizione sotto evoluzione temporale diventa uno stato che non è più autostato della posizione. Questo a sua volta segue dal fatto che l'operatore posizione non commuta con l'hamiltoniana, e quindi con l'operatore di evoluzione temporale.

5) Dalla eq. (12) abbiamo

$$\Delta^2 x(t) = \left[(x_s - \langle x_s\rangle)\cos\omega t + \frac{(p_s - \langle p_s\rangle)}{m\omega} \sin\omega t\right]^2$$

$$= \Delta^2 x_s \cos^2\omega t + \frac{\Delta^2 p_s}{m^2\omega^2} \sin^2\omega t + \frac{\{x, p\} - 2\langle x\rangle\langle p\rangle}{m\omega} \cdot$$

$$\cdot \sin\omega t \cos\omega t \qquad (18)$$

dove $\{p, x\} \equiv xp + px$.

6) Dopo una misura di energia, al tempo $t = +\varepsilon$ il sistema si trova nello stato $|0\rangle$ con il 33% di

5)

probabilità e nello stato $|1\rangle$ con il 66% di probabilità.

In entrambi gli stati, l'elemento di matrice di qualunque operatore non dipende dal tempo, perché si tratta di stati stazionari. Pertanto

$$\langle x(t)\rangle = \langle x\rangle\big|_{t=0} \qquad (19)$$

$$\langle \Delta^2 x(t)\rangle = \langle \Delta^2 x\rangle\big|_{t=0}$$

In entrambi i casi si ha

$$\langle 0|x|0\rangle = \langle 1|x|1\rangle = 0 \qquad (20)$$

poiché gli autostati dell'osc. armonico hanno parità definita.

Inoltre si ha, nei due casi,

$$\langle 1|\Delta^2 x|1\rangle = \langle 1|x^2|1\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\langle 1|(2a^\dagger a+1)|1\rangle$$

$$= \frac{3}{2}\frac{\hbar}{m\omega} \qquad (21)$$

$$\langle 0|\Delta^2 x|0\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \qquad (22)$$

Se viene eseguita una misura di posizione, al tempo $t=\varepsilon$ $\langle x\rangle = x_0$ e $\langle \Delta^2 x\rangle = 0$, $x_0$ essendo il risultato della misura. Ma ne segue quindi che a $t=\varepsilon$ $\Delta^2 p \to \infty$, per cui la (18) implica che $\Delta^2 x \to \infty$ per ogni $t \neq \frac{2n\pi}{\omega}$.

Tuttavia, se $t = \frac{n\pi}{\omega} \equiv t_n$ si ha che

$$\Delta^2 x(t_n) = \Delta^2 x(0) = 0 \qquad (23)$$

quindi con periodicità $t = \frac{\pi}{\omega}$ il sistema torna in un autostato della posizione.

7) Al punto precedente abbiamo dimostrato che in un autostato di energia $\Delta^2 x$ non dipende dal tempo.
Per dimostrare la compatibilità con la eq. (18) dobbiamo mostrare che $\Delta^2 x(t)$ eq. (18) è indipendente da $t$ se se ne prende il valor medio in un autostato di energia.

In primo luogo notiamo che in qualunque autostato di energia $\langle x \rangle = \langle p \rangle = 0$, perché gli autostati di energia hanno parità definita.
Notiamo inoltre che

$$\langle \psi | \{x, p\} | \psi \rangle = \langle \psi | xp + px | \psi \rangle = 2\, \mathrm{Re} \langle \psi | xp | \psi \rangle \qquad (24)$$

visto che

$$\langle \psi | xp | \psi \rangle^* = \langle \psi | p^+ x^+ | \psi \rangle = \langle \psi | px | \psi \rangle .$$

Ma ciò implica immediatamente

$$\langle \psi | \{x, p\} | \psi \rangle = 0$$

in qualunque autostato di energia, visto che nella base delle coordinate le autofunzioni di energia sono reali, mentre l'op. p è immaginario puro.

Abbiamo quindi

$$\langle n|\Delta^2 x(t)|n\rangle = \langle n|\Delta^2 x_S|n\rangle \cos^2\omega t + \langle n|\frac{\Delta^2 p_S}{m^2\omega^2}|n\rangle \sin^2\omega t \qquad (25)$$

Ma un calcolo simile a quello che porta alla eq. (6)

(visto a lezione) mostra che

$$\langle n|\Delta^2 x_S|n\rangle = \frac{\hbar}{m\omega}\left(n+\frac{1}{2}\right) \qquad (26)$$

$$\langle n|\frac{\Delta^2 p}{m^2\omega^2}|n\rangle = \frac{m\hbar\omega}{m^2\omega^2}\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{\hbar}{m\omega}\left(n+\frac{1}{2}\right) \qquad (27)$$

Pertanto

$$\langle n|\Delta^2 x(t)|n\rangle = \frac{\hbar}{m\omega}\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t\right)$$

$$= \frac{\hbar}{m\omega}\left(n+\frac{1}{2}\right) \qquad (28)$$

indipendente dal tempo, come si voleva dimostrare.