Esame scritto di fisica moderna

Traccia di soluzione

18 giugno 2012

Esercizio 1. A partire dell'equazione (3) possiamo ricavare gli operatori x e p:

$$\begin{cases} a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right) \\ a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{ip}{m\omega}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega m}}\left(a + a^\dagger\right) \\ p = -i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\left(a - a^\dagger\right) \end{cases} \tag{1}$$

Calcoliamo $\langle\psi|x|\psi\rangle$ sapendo che

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \tag{2}$$

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \tag{3}$$

cioè che $a|0\rangle = 0$, $a|1\rangle = |0\rangle$ e $a^\dagger|0\rangle = |1\rangle$. Ne segue che

$$\langle\psi|x|\psi\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0| + \frac{1-i}{2}\langle 1|\right)\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a+a^\dagger)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1+i}{2}|1\rangle\right) = \tag{4}$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left\{\frac{1}{2}\underbrace{\langle 0|a+a^\dagger|0\rangle}_{0} + \frac{1+i}{2\sqrt{2}}\langle 0|a+a^\dagger|1\rangle + \frac{1-i}{2\sqrt{2}}\langle 1|a+a^\dagger|0\rangle + \frac{1}{2}\underbrace{\langle 1|a+a^\dagger|1\rangle}_{0}\right\} \tag{5}$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left\{\frac{1+i}{2\sqrt{2}}\left(\underbrace{\langle 0|a|1\rangle}_{1} + \underbrace{\langle 0|a^\dagger|1\rangle}_{0}\right) + \frac{1-i}{2\sqrt{2}}\left(\underbrace{\langle 1|a|0\rangle}_{0} + \underbrace{\langle 1|a^\dagger|0\rangle}_{1}\right)\right\} \tag{6}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \tag{7}$$

Analogamente

$$\langle\psi|p|\psi\rangle = -i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0| + \frac{1-i}{2}\langle 1|\right)(a-a^\dagger)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1+i}{2}|1\rangle\right) \tag{8}$$

$$= -i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\left\{\frac{1}{2}\langle 0|a-a^\dagger|0\rangle + \frac{1+i}{2\sqrt{2}}\langle 0|a-a^\dagger|1\rangle + \frac{1-i}{2\sqrt{2}}\langle 1|a-a^\dagger|0\rangle + \frac{1}{2}\langle 1|a-a^\dagger|1\rangle\right\} \tag{9}$$

$$= -i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\left\{\frac{1+i}{2\sqrt{2}}\left(\underbrace{\langle 0|a|1\rangle}_{1} - \underbrace{\langle 0|a^\dagger|1\rangle}_{0}\right) + \frac{1-i}{2\sqrt{2}}\left(\underbrace{\langle 1|a|0\rangle}_{0} - \underbrace{\langle 1|a^\dagger|0\rangle}_{1}\right)\right\} \tag{10}$$

$$= \frac{\sqrt{m\omega\hbar}}{2} \tag{11}$$

Esercizio 2. Calcoliamo l'indeterminazione di x e p. L'indeterminazione di un'osservabile è definita come

$$\Delta x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \tag{12}$$

Gli operatori x^2 e p^2 in termini di operatori di creazione e distruzione sono dati da

$$x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(a + a^\dagger\right)^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(a^2 + a^{\dagger 2} + aa^\dagger + a^\dagger a\right). \tag{13}$$

$$p^2 = -\frac{m\omega\hbar}{2}\left(a - a^\dagger\right)^2 = -\frac{m\omega\hbar}{2}\left(a^2 + a^{\dagger 2} - aa^\dagger - a^\dagger a\right) \tag{14}$$

Si ha

$$\begin{aligned}
\langle\psi|x^2|\psi\rangle &= \frac{\hbar}{2m\omega}\langle\psi|a^2 + a^{\dagger 2} + aa^\dagger + a^\dagger a|\psi\rangle && (15)\\
&= \frac{\hbar}{2m\omega}\left\{\frac{1}{2}\mathbf{I} + \frac{1+i}{2\sqrt{2}}\mathbf{II} + \frac{1-i}{2\sqrt{2}}\mathbf{III} + \frac{1}{2}\mathbf{IV}\right\} && (16)\\
&= \frac{\hbar}{2m\omega}\left\{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right\} = \frac{\hbar}{m\omega}, && (17)
\end{aligned}$$

dove i vari contributi sono

$$\mathbf{I} = \langle 0|a^2 + a^{\dagger 2} + aa^\dagger + a^\dagger a|0\rangle = \underbrace{\langle 0|a^2|0\rangle}_{0} + \underbrace{\langle 0|a^{\dagger 2}|0\rangle}_{0} + \underbrace{\langle 0|aa^\dagger|0\rangle}_{1} + \underbrace{\langle 0|a^\dagger a|0\rangle}_{0} = 1. \tag{18}$$

$$\mathbf{II} = \langle 0|a^2 + a^{\dagger 2} + aa^\dagger + a^\dagger a|1\rangle = \underbrace{\langle 0|a^2|1\rangle}_{0} + \underbrace{\langle 0|a^{\dagger 2}|1\rangle}_{0} + \underbrace{\langle 0|aa^\dagger|1\rangle}_{0} + \underbrace{\langle 0|a^\dagger a|1\rangle}_{0} = 0 \tag{19}$$

$$\mathbf{III} = \langle 1|a^2 + a^{\dagger 2} + aa^\dagger + a^\dagger a|0\rangle = \underbrace{\langle 1|a^2|0\rangle}_{0} + \underbrace{\langle 1|a^{\dagger 2}|0\rangle}_{0} + \underbrace{\langle 1|aa^\dagger|0\rangle}_{0} + \underbrace{\langle 1|a^\dagger a|0\rangle}_{0} = 0 \tag{20}$$

$$\mathbf{IV} = \langle 1|a^2 + a^{\dagger 2} + aa^\dagger + a^\dagger a|1\rangle = \underbrace{\langle 1|a^2|1\rangle}_{0} + \underbrace{\langle 1|a^{\dagger 2}|1\rangle}_{0} + \underbrace{\langle 1|aa^\dagger|1\rangle}_{2} + \underbrace{\langle 1|a^\dagger a|1\rangle}_{1} = 3. \tag{21}$$

quindi l'indeterminazione su x è

$$\Delta x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{\hbar}{m\omega} - \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\right)^2 = \frac{3}{4}\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right). \tag{22}$$

Per quanto riguarda l'impulso si ha

$$\begin{aligned}
\langle\psi|p^2|\psi\rangle &= -\frac{m\omega\hbar}{2}\langle\psi|a^2 + a^{\dagger 2} - aa^\dagger - a^\dagger a|\psi\rangle && (23)\\
&= -\frac{m\omega\hbar}{2}\left\{\frac{1}{2}\mathbf{I} + \frac{1+i}{2\sqrt{2}}\mathbf{II} + \frac{1-i}{2\sqrt{2}}\mathbf{III} + \frac{1}{2}\mathbf{IV}\right\} && (24)\\
&= -\frac{m\omega\hbar}{2}\left\{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right\} = m\omega\hbar, && (25)
\end{aligned}$$

dove i vari contributi sono dati da

$$\mathbf{I} = \langle 0|a^2 + a^{\dagger 2} - aa^\dagger - a^\dagger a|0\rangle = \underbrace{\langle 0|a^2|0\rangle}_{0} + \underbrace{\langle 0|a^{\dagger 2}|0\rangle}_{0} - \underbrace{\langle 0|aa^\dagger|0\rangle}_{1} - \underbrace{\langle 0|a^\dagger a|0\rangle}_{0} = -1. \tag{26}$$

$$\mathbf{II} = \langle 0|a^2 + a^{\dagger 2} - aa^\dagger - a^\dagger a|1\rangle = \underbrace{\langle 0|a^2|1\rangle}_{0} + \underbrace{\langle 0|a^{\dagger 2}|1\rangle}_{0} - \underbrace{\langle 0|aa^\dagger|1\rangle}_{0} - \underbrace{\langle 0|a^\dagger a|1\rangle}_{0} = 0 \tag{27}$$

$$\mathbf{III} = \langle 1|a^2 + a^{\dagger 2} - aa^\dagger - a^\dagger a|0\rangle = \underbrace{\langle 1|a^2|0\rangle}_{0} + \underbrace{\langle 1|a^{\dagger 2}|0\rangle}_{0} - \underbrace{\langle 1|aa^\dagger|0\rangle}_{0} - \underbrace{\langle 1|a^\dagger a|0\rangle}_{0} = 0 \tag{28}$$

$$\mathbf{IV} = \langle 1|a^2 + a^{\dagger 2} - aa^\dagger - a^\dagger a|1\rangle = \underbrace{\langle 1|a^2|1\rangle}_{0} + \underbrace{\langle 1|a^{\dagger 2}|1\rangle}_{0} - \underbrace{\langle 1|aa^\dagger|1\rangle}_{2} - \underbrace{\langle 1|a^\dagger a|1\rangle}_{1} = -3, \tag{29}$$

quindi l'indeterminazione su p è

$$\Delta p^2 = \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2 = m\omega\hbar - \frac{m\omega\hbar}{4} = \frac{3}{4}m\omega\hbar. \tag{30}$$

Vediamo infine che

$$\Delta x^2 \Delta p^2 = \frac{9}{16}\hbar^2 > \frac{1}{4}|\langle\psi|\,[x,p]\,|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{4}\hbar^2, \tag{31}$$

quindi il principio d'indeterminazione di Heisenberg è rispettato. Dato che lo stato $|\psi\rangle$ non è formato solamente dallo stato fondamentale $|0\rangle$ abbiamo $\Delta x^2\Delta p^2 > \hbar^2/4$.

Esercizio 3. Lo stato $|\psi\rangle$ è una sovrapposizione di autostati di energia dell'hamiltoniana per $t < 0$, e la sua evoluzione temporale, per $t < 0$ è quindi data da

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\psi\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}\frac{(1+i)}{2}|1\rangle. \tag{32}$$

Notare che il fatto che la condizione iniziale sia data al tempo finale $t = 0$ non fa alcuna differenza. Ne segue in particolare che la probabilità di risultati di una misura di energia non dipende dal valore del tempo $t < 0$, e quindi dopo la misura il sistema potrà trovarsi in $|0\rangle$ o $|1\rangle$con le rispettive probabilità

$$P_{|0\rangle} = |\langle 0|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{2} \tag{33}$$

$$P_{|1\rangle} = |\langle 1|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{2} \tag{34}$$

Esercizio 4. Le equazioni del moto di Heisenberg per gli operatori posizione ed impulso sono date da

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[x,H] = -\frac{i}{\hbar}\left[x, \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2+a^2\right) - m\omega^2 xa\right] = -\frac{i}{\hbar}\left[x, \frac{p^2}{2m}\right] = \frac{p}{m} \tag{35}$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[p,H] = -\frac{i}{\hbar}\left[p, \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2+a^2\right) - m\omega^2 xa\right] = -m\omega^2(x-b) \tag{36}$$

Possiamo risolvere il sistema di equazioni differenziali a partire da

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2(x-b), \tag{37}$$

la cui soluzione è

$$x(t) = c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t) + b \tag{38}$$
$$p(t) = mx'(t) = -m\omega c_1\sin(\omega t) + mc_2\omega\cos(\omega t). \tag{39}$$

Imponendo le condizioni iniziali $x(0) = x_s$, $p(0) = p_s$ otteniamo

$$x(t) = (x_s - b)\cos(\omega t) + \frac{p_s}{m\omega}\sin(\omega t) + b \tag{40}$$
$$p(t) = -m\omega\,(x_s - b)\sin(\omega t) + p_s\cos(\omega t). \tag{41}$$

Esercizio 5. Se la misura dà come risultato $E = \frac{1}{2}\hbar\omega$, dopo la misura il sistema si trova nello stato $|0\rangle$ (stato fondamentale dell'hamiltoniana per $t \leq 0$). Al tempo $t = 0$ esso si trova pertanto nello stato

$$|\varphi(0)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Et_0}|0\rangle \tag{42}$$

dove $t_0 \leq 0$ è il valore del tempo all'istante in cui viene fatta la misura dell'energia E.

I valori medi di posizione ed impulso dal tempo $t = t_0$ fino al tempo $t = 0$ non dipendono dal tempo in quanto il sistema si trova in uno stato stazionario (autostato dell'energia) e sono dati da

$$\langle\varphi(t)|x|\varphi(t)\rangle = \langle\varphi(t)|p|\varphi(t)\rangle = 0, \quad \text{per ogni } t \leq 0. \tag{43}$$

visto che i valori medi di posizione ed impulso in un autostato dell'hamiltoniana di oscillatore armonico si annullano.

Per $t > 0$ si può utilizzare la soluzione del problema precedente, utilizzando la Eq. (43) come condizione iniziale. Si ha

$$\langle\varphi(0)|x(t)|\varphi(0)\rangle = \langle\varphi(0)|\,(x_s - b)\cos(\omega t) + \frac{p_s}{m\omega}\sin(\omega t) + b|\varphi(0)\rangle = b\,(1 - \cos(\omega t)) \tag{44}$$
$$\langle\varphi(0)|p(t)|\varphi(0)\rangle = \langle\varphi(0)| - m\omega\,(x_s - b)\sin(\omega t) + p_s\cos(\omega t)|\varphi(0)\rangle = m\omega b\sin(\omega t). \tag{45}$$

Quindi per $t > 0$ il sistema oscilla attorno al punto $x = a$.

Esercizio 6. Definiamo gli autostati delle due hamiltoniane al tempo $t \leq 0$ e $t > 0$ come

$$\begin{cases} H|n\rangle = \frac{\hbar\omega}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)|n\rangle & t > 0 \\ H_0|n\rangle_0 = \frac{\hbar\omega}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)|n\rangle_0 & t \leq 0. \end{cases} \tag{46}$$

Notare che lo spettro di autovalori è lo stesso nei due casi.

Inoltre definiamo l'operatore di traslazione T_b

$$T_b = e^{i\frac{p}{\hbar}b} \tag{47}$$

che agisce su un autostato della posizione $|x\rangle$ come

$$T_b|x\rangle = |x - b\rangle \tag{48}$$

e sull'operatore posizione come

$$T_b^\dagger x T_b = x - b. \tag{49}$$

La Eq. (49) implica che

$$H_0 = T_b H T_b^\dagger. \tag{50}$$

Ma questo implica che

$$T_b \frac{\hbar\omega}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)|n\rangle = T_b H T_b^\dagger T_b |n\rangle = H_0 T_b |n\rangle \tag{51}$$

da cui segue immediatamente

$$|n\rangle_0 = T_b|n\rangle. \tag{52}$$

A questo punto applichiamo l'operatore di annichilazione a allo stato fondamentale del sistema a $t > 0$:

$$a|0\rangle = aT_b^\dagger|0\rangle_0. \tag{53}$$

Usando la Eq. 1 e la Eq. (52) abbiamo immediatamente che

$$T_b a|0\rangle = T_b a T_b^\dagger |0_0\rangle = \left(a + b\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\right)|0_0\rangle = b\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}|0_0\rangle, \tag{54}$$

e quindi utilizzando l'Eq. (53)

$$a|0\rangle = b\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} T_b^\dagger |0_0\rangle = b\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}|0\rangle. \tag{55}$$

Quindi lo stato $|0\rangle$ è autostato dell'operatore di distruzione relativo all'hamiltoniana H_0.

Esercizio 7. Possiamo scrivere l'indeterminazione richiesta come

$$\Delta^2 x(t) = {}_0\langle 0|(x - \langle x\rangle)^2|0\rangle_0(t) = {}_0\langle 0|(x(t) - \langle x(t)\rangle^2\rangle)|0\rangle_0, \tag{56}$$

dove il valor medio è calcolato nello stato fondamentale dell hamiltoniana al tempo $t = 0$, e nell'ultimo passo abbia supposto che l'evoluzione temporale sia trattata alla heisenberg.

Osserviamo ora che l'operatore $(x(t) - \langle x(t)\rangle)$ è (ovviamente) invariante per traslazioni, e quindi

$${}_0\langle 0|(x(t) - \langle x(t)\rangle^2|0\rangle_0 = {}_0\langle 0|T_b^\dagger(x(t) - \langle x(t)\rangle^2 T_b|0\rangle_0 = \langle 0|(x(t) - \langle x(t)\rangle^2|0\rangle, \tag{57}$$

dove nell'ultimo passo abbiamo usato la Eq. (53). Ma lo stato $|0\rangle$ è stazionario a $t > 0$ (è un autostato dell'hamiltoniana) e quindi il membro destro dell'equazione è manifestamente indipendente dal tempo.

Verifichiamo ora il risultato con il calcolo esplicito: utilizzando le espressioni trovate nell'esercizio (4) abbiamo

$$\begin{aligned}
\langle\varphi(0)|x^2|\varphi(0)\rangle &= \langle\Big\{(x_s - b)^2\cos^2(\omega t) + \frac{p_s^2}{(m\omega)^2}\sin^2(\omega t) + b^2 + 2(x_s - b)b\cos(\omega t) + & (58)\\
&\quad 2\frac{p_s}{m\omega}b\sin(\omega t) + (x_s - b)\frac{p_s}{m\omega}\cos(\omega t)\sin(\omega t) + \frac{p_s}{m\omega}(x_s - b)\cos(\omega t)\sin(\omega t)\Big\}\rangle & (59)\\
&= b^2(1 - \cos(\omega t))^2 + \frac{\hbar}{2m\omega} & (60)
\end{aligned}$$

da cui

$$\Delta x^2_{t>0} = b^2(1 - \cos(\omega t))^2 + \frac{\hbar}{2m\omega} - b^2(1 - \cos(\omega t))^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}. \tag{61}$$