Esame scritto di fisica moderna

15 luglio 2010

Traccia di soluzione

1) I valori medi sono dati da

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, |N|^2 \left| e^{ik_0x} + e^{-ik_0x} \right|^2 e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2} x \tag{1}$$

$= 0$ integr. di funzione dispari su dominio simmetrico

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, |N|^2 \left(e^{ik_0x} + e^{-ik_0x} \right) e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2} \left(-i\hbar \frac{d}{dx} \right) \left(e^{ik_0x} + e^{-ik_0x} \right) e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2} \tag{2}$$

$$= -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx \, |N|^2 \psi(x) \frac{d}{dx} \psi(x) \tag{3}$$

in quanto $\psi^*(x) = \psi(x)$

$= 0$ per lo stesso motivo,

2) Nella regione $x \neq 0$ l'hamiltoniana è uguale a quella di particella libera. Le sue autofunzioni sono pertanto le onde piane

$$\psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp ikx \tag{4}$$

associate agli autovalori di energia

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi_k(x) = E_k \psi_k(x) \tag{5}$$

$$E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \tag{6}$$

Poiché si tratta di stati del continuo, essi soddisfano la condizione di normalizzazione impropria

$$\langle k | k' \rangle = \delta(k-k') \qquad (7)$$

La generica autofunzione di energia E è quindi $\psi_{E_k}(x) = A_E \psi_k + B_E \psi_{-k}$ (8)

3) a) Nel caso $\sigma \to \infty$, la funzione d'onda è

$$\psi(x) = N\left(e^{ik_0x} + e^{-ik_0x}\right) \qquad (9)$$

Essa è la sovrapposizione di due autostati dell'impulso associati agli autovalori $\pm\hbar k_0$. Quindi una misura di impulso dà come risultati $\pm\hbar k_0$, con probabilità 1/2

b) Nel caso di σ finito, la f. d'onda è una sovrapposizione di autostati dell'impulso associati a tutti i valori possibili. La probabilità in questo caso è una densità di probabilità: la misura dà come risultato $\hbar k$ con densità di probabilità $P(k) = |\psi(k)|^2$

con

$$\psi(k) = \langle k | \psi \rangle = \qquad (10)$$

$$= \langle k | x \rangle \langle x | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} \psi(x)$$

con $\psi(x)$ data dalla eq. (1) dell'enunciato.

Si ha

$$\psi(k) = N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{i(k_0-k)x} + e^{-i(k_0+k)x}\right) e^{-\frac{1}{4\sigma^2}x^2}$$

$$= N\sqrt{\frac{2}{\sigma^2}} \left(e^{-(k-k_0)^2\sigma^2} + e^{-(k+k_0)^2\sigma^2}\right) \qquad (11)$$

La funzione d'onda data è la sovrapposizione di due pacchetti gaussiani centrati in $\pm k_0$, i valori più probabili sono quindi $p = \pm \hbar k_0$.

4) L'eq. di Schrödinger stazionaria soddisfatta dalle autofunzioni dell'hamiltoniana è

$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = \frac{2Em}{\hbar^2}\psi(x) - \frac{2\chi m}{\hbar^2}\delta(x)\psi(x) \qquad (12)$$

$$= \frac{2Em}{\hbar^2}\psi(x) - \frac{2\chi m}{\hbar^2}\delta(x)\psi(0)$$

Essa pertanto implica che

$$\psi'(x) = A\,\Theta(x) + f(x) \qquad (13)$$

dove $f(x)$ è continua. Infatti, sostituendo la (13) nella (12) abbiamo

$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = -\frac{d}{dx}\psi'(x) =$$

$$= -A\,\delta(x) - f'(x).$$

Eguagliando i termini proporzionali alla δ abbiamo

$$+A = +\frac{2\chi m}{\hbar^2}\psi(0) \qquad (14)$$

5) Le autofunzioni di energia nelle regioni $x \neq 0$ sono

$$x<0 \qquad \psi_E^{I}(x) = A_E\psi_k(x) + B_E\psi_{-k}(x) \qquad (15)$$

$$x>0 \qquad \psi_E^{II}(x) = C_E\,\psi_k(x) \qquad (16)$$

visto che si è supposto che nella regione $x>0$ vi sia solo l'onda progressiva.

La condizione di continuità della funzione d'onda in $x=0$

è
$$A_E + B_E = C_E \qquad (17)$$

La condizione di discontinuità della derivata prima della funzione d'onda si trova notando che

$$\psi_E^{I'}(x) = ik\left(A_E\, \psi_k(x) - B_E\, \psi_k(x)\right) \qquad (18)$$

$$\psi_E^{II'}(x) = ik\, C_E\, \psi_k(x) \qquad (19)$$

da cui, usando la eq. (14)

$$\psi_E^{II'}(0) = \psi_E^{I'}(0) + \frac{2\chi m}{\hbar^2}\, \psi(0) \qquad (20)$$

ossia, usando le eq. (17-20)

$$ik(A_E - B_E) = ik\, C_E - \frac{2\chi m}{\hbar^2}\, C_E \qquad (21)$$

ossia

$$ik(A_E - B_E) = \left(ik - \frac{2\chi m}{\hbar^2}\right)(A_E + B_E) \qquad (22)$$

$$A_E\, \frac{2\chi m}{\hbar^2} = -2B_E\left(\frac{ik\hbar^2 - \chi m}{\hbar^2}\right) \qquad (23)$$

(24)

$$B_E = \frac{\chi m}{ik\hbar^2 - \chi m}\, A_E \qquad (24)$$

e quindi dalla eq. (17)

$$C_E = \frac{i k \hbar^2}{i k \hbar^2 - \chi m} A_E \qquad (25)$$

Le eq. (24) – (25) determinano completamente l'autofunzione dell'energia, espressa in termini di k dalla eq. (6). La costante A_E resta fissata per normalizzazione.

6) La corrente di probabilità è

$$x < 0 \qquad j = \frac{\hbar k}{m}\left(|A_E|^2 - |B_E|^2\right) = \frac{\hbar k}{m}|A_E|^2 \frac{(k\hbar^2)^2}{(k\hbar^2)^2 + \chi^2 m^2}$$

$$x > 0 \qquad j = \frac{\hbar k}{m} |C_E|^2 = \frac{\hbar k}{m} |A_E|^2 \frac{(k\hbar^2)^2}{(k\hbar^2)^2 + \chi^2 m^2} \qquad (26)$$

Pertanto la corrente di probabilità è costante ed in particolare continua in $x = 0$.

I coefficienti di trasmissione e riflessione sono

$$T = \frac{(\hbar^2 k)^2}{(k\hbar^2)^2 + \chi^2 m^2}$$

$$R = \frac{\chi^2 m^2}{(k\hbar^2)^2 + \chi^2 m^2} \qquad (27)$$

7) Le soluzioni determinate al punto 5 dipendono solo da χ^2, pertanto esse sono autofunzioni sia quando $\chi > 0$ che quando $\chi < 0$. In aggiunta a tali autofunzioni, vi è una ulteriore famiglia di soluzioni corrispondenti

al caso di onda regressiva, cioè della forma

$$x<0 \quad \psi_E = A_E e^{-ikx}$$
$$x>0 \quad \psi_E = B_E e^{ikx} + C_E e^{-ikx} \qquad (28)$$

Queste soluzioni esistono qualunque sia il segno di λ.
Equivalentemente, si può osservare che la hamiltoniana data è invariante sotto parità, cioè

$$\mathcal{P} H \mathcal{P}^{-1} = H \qquad (29)$$

Ne segue che o le autofunzioni di H sono degeneri, dimodoché se $\psi_E(x)$ è autofunzione anche $\psi_E(-x)$ è autofunzione (spettro continuo) oppure, se sono non-degeneri, sono autostati della parità, cioè $\psi_E(x) = \pm \psi_E(-x)$.
Le soluzioni eq. (18-19) non sono autostati della parità, quindi anche le $\psi(-x)$ ottenute da esse sono autostati associati allo stesso autovalore. Le sol eq. (28) possono essere ottenute come combinazione lineare delle (18-19) e delle loro trasformate di parità.

Infine, quando $\lambda<0$ vi è anche uno stato legato.
Esso è autostato di parità.