ESAME SCRITTO DI FISICA MODERNA

23 luglio 2018

Traccia di soluzione

(1) In base alle informazioni fornite nel testo, il vettore di stato $|\psi\rangle$ deve soddisfare:

$$|\langle 0|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{3} \qquad |\langle 1|\psi\rangle|^2 = \frac{2}{3}, \tag{1}$$

in cui $|0\rangle$ e $|1\rangle$ sono rispettivamente lo stato fondamentale e il primo stato eccitato dell'hamiltoniana di oscillatore armonico, con energie date dalla nota formula $E_n = \hbar\omega(n+1/2)$. Questo fissa il modulo quadro dei coefficienti della sovrapposizione, a meno di una normalizzazione e di unafase globale, e di una fase relativa. Supponendo che lo stato $|\psi\rangle$ sia normalizzato ad uno, e scegliendo arbitrariamente il coefficiente di $|0\rangle$ come reale positivo, si ha

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\,|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\,|1\rangle\, e^{i\varphi}, \tag{2}$$

dove la fase φ resta per ora indeterminata.

(2) Il suggerimento ci permette di ricavare $a^\dagger$, ovvero l'aggiunto di a, e l'espressione degli operatori x e p in funzione di a e $a^\dagger$:

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger) \qquad p = -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(a - a^\dagger). \tag{3}$$

Usando l'espressione per $|\psi\rangle$ data da (2), abbiamo:

$$\begin{aligned}\langle\psi|x|\psi\rangle = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\,\langle 0| + \sqrt{\frac{2}{3}}\,\langle 1|\, e^{-i\varphi}\right)\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger)\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\,|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\,|1\rangle\, e^{i\varphi}\right) = \\ \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\frac{\sqrt{2}}{3}\left[e^{i\varphi}\langle 0|a|1\rangle + e^{-i\varphi}\langle 1|a^\dagger|0\rangle\right] = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\cos\varphi,\end{aligned} \tag{4}$$

in cui abbiamo tenuto conto del fatto che gli unici elementi di matrice dell'operatore x non nulli sono quelli tra autostati dell'energia che differiscono di un'unità. Inoltre naturalmente $a\,|0\rangle = 0$ e $a\,|1\rangle = |0\rangle$. Analogamente, per l'elemento di matrice che coinvolge p:

$$\begin{aligned}\langle\psi|p|\psi\rangle = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\,\langle 0| + \sqrt{\frac{2}{3}}\,\langle 1|\, e^{-i\varphi}\right) - i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(a - a^\dagger)\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\,|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\,|1\rangle\, e^{i\varphi}\right) = \\ -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\frac{\sqrt{2}}{3}\left[e^{i\varphi}\langle 0|a|1\rangle - e^{-i\varphi}\langle 1|a^\dagger|0\rangle\right] = -\frac{1}{3}\sqrt{m\hbar\omega}\,2\sin\varphi.\end{aligned} \tag{5}$$

Affinchè, come richiesto dal testo, il risultato di (4) sia pari a $2/3\sqrt{\hbar/m\omega}$, mentre il risultato di (5) sia pari a 0 deve valere:

$$\cos\varphi = 1 \qquad \sin\varphi = 0, \tag{6}$$

per cui $\varphi = 0$. La conoscenza di $\langle x\rangle$ determina completamente la fase relativa, mentre la conoscenza di $\langle p\rangle$ implica che $\varphi = 0$ oppure $\varphi = \pi$: quindi determina la fase relativa in modo incompleto (a meno del segno).

(3) Supponendo che lo spettro degli operatori sia non degenere, dimostriamo la condizione necessaria e sufficiente enunciata nel testo.

Dimostriamo prima che due operatori A e B simultaneamente diagonalizzabili commutano tra loro. A e B hanno quindi per ipotesi una stessa base di autostati $|e_k\rangle$:

$$A\,|e_k\rangle = a_k\,|e_k\rangle \tag{7}$$

$$B\,|e_k\rangle = b_k\,|e_k\rangle\,. \tag{8}$$

Calcoliamo gli elementi di matrice del commutatore $[A, B] = AB - BA$ in questa base:

$$\langle e_j|[A,B]|e_i\rangle = \langle e_j|a_j B - B a_i|e_i\rangle = (a_j b_j - b_i a_i)\,\langle e_j|e_i\rangle = 0, \tag{9}$$

cioè il commutatore è l'operatore nullo e A e B commutano.

Dimostriamo ora che due operatori A e B commutanti sono simultaneamente diagonalizzabili. Scriviamo il generico elemento di matrice del commutatore in una base $|a_k\rangle$ di autostati di A con autovalori a_k, e imponiamo che sia nullo:

$$0 = \langle a_j|[A,B]|a_i\rangle = \langle a_j|a_j B - B a_i|a_i\rangle = (a_j - a_i)\,\langle a_j|B|a_i\rangle\,. \tag{10}$$

Dal momento che lo spettro di A non è degenere, $a_j - a_i = 0$ se e solo se $i = j$ e pertanto (10) richiede che valga $\langle a_j|B|a_i\rangle = 0$ per $i \neq j$ i.e. l'operatore B nella base $|a_k\rangle$ è diagonale e può essere scritto come:

$$B = \sum_{ij} |a_i\rangle\, B_{ij}\,\langle a_j| = \sum_k b_k\,|a_k\rangle\,\langle a_k|\,, \tag{11}$$

dove abbiamo indicato con b_k gli elementi diagonali. La dimostrazione si conclude notando che (11) implica banalmente che:

$$B\,|a_l\rangle = \sum_k b_k\,|a_k\rangle\,\langle a_k|a_l\rangle = b_l\,|a_l\rangle \tag{12}$$

e quindi la base $|a_l\rangle$ di autostati di A costituisce una base di autostati anche per B con autovalori b_l.

(4) Gli operatori di creazione e di distruzione relativi all'hamiltoniana H' si ottengono osservando che le relazioni di commutazione con questa hamiltoniana sono le stesse degli operatori soliti con l'hamiltoniana H se si sostituisce nelle loro espressioni l'operatore $\hat{x}$ con l'operatore $\hat{x'} = \hat{x} - x_0$:

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - x_0 + \frac{ip}{m\omega}\right). \tag{13}$$

Le hamiltoniane H e H' hanno gli stessi autovalori poiché possono essere entrambe riscritte in termini dei rispettivi operatori numero $N = a^\dagger a$ e $N' = a'^\dagger a'$, i quali però, una volta fatti agire sui rispettivi autostati $|n\rangle$ e $|n'\rangle$, forniscono lo stesso insieme di autovalori discreti, dati da $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$. La trasformazione unitaria che lega gli autovettori $|n'\rangle$ e $|n\rangle$ si può costruire osservando che nella rappresentazione delle coordinate:

$$\langle x|n'\rangle = \langle x - x_0|n\rangle\,. \tag{14}$$

Pertanto, ricordando che il generatore delle traslazioni è $\hat{p}/\hbar$, si ha

$$\langle x|U|n\rangle = \langle x - x_0|n\rangle \to U = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}x_0\hat{p}\right). \tag{15}$$

L'azione della trasformazione sull'operatore x è

$$U^\dagger x U = \exp\left(+\frac{i}{\hbar}x_0\,p\right) x \exp\left(-\frac{i}{\hbar}x_0\,p\right) = x + x_0. \tag{16}$$

Questo si può dimostrare sviluppando l'esponenziale in serie di potenze, con $c = -ix_0/\hbar$:

$$
\begin{aligned}
x\exp(cp) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k}{k!}\, xp^k = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c^k}{k!}\, xp^k = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c^k}{k!}\, (ki\hbar p^{k-1} + p^k x) \\
&= i\hbar c \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c^{k-1}}{(k-1)!}\, p^{k-1} + x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c^k}{k!}\, p^k x = i\hbar c\exp(cp) + \exp(cp)x = \exp(cp)(i\hbar c + x) \qquad (17)
\end{aligned}
$$

dove abbiamo ricorsivamente sfruttato il commutatore $[x,p] = i\hbar$. Si ottiene

$$U^\dagger x U = U^\dagger U(i\hbar c + x) = x + x_0 \qquad (18)$$

(la dimostrazione esplicita argomento non è richiesta).

Per quanto riguarda p, (15) ci assicura che l'operatore U commuta con p, e quindi abbiamo:

$$U^\dagger p U = U^\dagger U p = p. \qquad (19)$$

(5) Lavoriamo in rappresentazione di Heisenberg: calcoliamo prima i valori medi richiesti nello stato fondamentale di H', poi studiamo l'evoluzione degli operatori con l'hamiltoniana H.
Lo stato fondamentale dell'hamiltoniana H' in rappresentazione delle coordinate è dato da $\psi_{0'}(x) = \psi_0(x - x_0)$, dove ψ_0 è lo stato fondamentale dell'hamiltoniana H. Esso si ricava risolvendo l'equazione differenziale $a\,|0\rangle = 0$, ovvero:

$$\frac{\partial \psi_0(x)}{\partial x} = -x\psi_0(x)\frac{m\omega}{\hbar} \qquad (20)$$

con soluzione

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{x^2 m\omega}{2\hbar}\right). \qquad (21)$$

Pertanto abbiamo:

$$
\begin{aligned}
\langle 0'|x|0'\rangle &= \int \mathrm{d}x\ \langle 0'|x|x\rangle \langle x|0'\rangle = \int \mathrm{d}x\, x\psi_0^*(x - x_0)\psi_0(x - x_0) = \int \mathrm{d}x\, (x + x_0)\psi_0^*(x)\psi_0(x) \\
&= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \int \mathrm{d}x\, (x + x_0)\exp\left(-\frac{x^2 m\omega}{\hbar}\right) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} x_0 \left(\frac{\pi\hbar}{m\omega}\right)^{1/2} = x_0. \qquad (22)
\end{aligned}
$$

Il problema può essere risolto in modo alternativo sfruttando il risultato trovato in (18) e sapendo che $\langle n|x|n\rangle = 0$, otteniamo:

$$\langle 0'|x|0'\rangle = \langle 0|U^\dagger x U|0\rangle = \langle 0|x + x_0|0\rangle = x_0. \qquad (23)$$

Analogamente per l'impulso possiamo fare il calcolo esplicito come in (22), oppure usare (19) e scrivere:

$$\langle 0'|p|0'\rangle = \langle 0|U^\dagger p U|0\rangle = 0, \qquad (24)$$

dove abbiamo sfruttato $\langle n|p|n\rangle = 0$.

Determiniamo ora l'evoluzione temporale degli operatori posizione e impulso con il tempo. Conviene usare la rappresentazione di Heisenberg. Il risultato per l'hamiltoniana di oscillatore armonico standard H è

$$x(t) = x_S\cos(\omega t) + \frac{p_S}{m\omega}\sin(\omega t) \qquad (25)$$

$$p(t) = -m\omega x_S \sin(\omega t) + p_S\cos(\omega t), \qquad (26)$$

e si può ricavare risolvendo le equazioni del moto alla Heisenberg per gli operatori x e p, oppure per gli operatori di distruzione e creazione a e $a^\dagger$. Abbiamo quindi:

$$\langle 0'(t)|x|0'(t)\rangle = \langle 0'|x(t)|0'\rangle = x_0 \cos(\omega t) \tag{27}$$
$$\langle 0'(t)|p|0'(t)\rangle = \langle 0'|p(t)|0'\rangle = -m\omega x_0 \sin(\omega t). \tag{28}$$

(6) Dimostriamo che vale

$$a\,|0'\rangle = z\,|0'\rangle\,, \tag{29}$$

e determiniamo z.
Dal momento che $U^\dagger x U = x + x_0$ e $U^\dagger p U = p$, otteniamo l'analoga trasformazione per a

$$U^\dagger a U = U^\dagger \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right) U = a + \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x_0, \tag{30}$$

e quindi

$$a\,|0'\rangle = aU\,|0\rangle = UU^\dagger a U\,|0\rangle = U\left(a + \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x_0\right)|0\rangle = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x_0 U\,|0\rangle = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x_0\,|0'\rangle\,, \tag{31}$$

da cui leggiamo il valore dell'autovalore z.

(7) Per determinare l'azione dell'operatore $P = \exp(i\pi a^\dagger a)$ indicato nel testo sullo stato $|0'\rangle$, sviluppiamo questo stato sulla base degli autostati dell'hamiltoniana H:

$$|0'\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\,\langle n|0'\rangle\,. \tag{32}$$

Dal momento che $a^\dagger a$ è l'operatore numero relativo all'hamiltoniana H, abbiamo

$$P\,|0'\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(i\pi a^\dagger a)\,|n\rangle\,\langle n|0'\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(i\pi n)\,|n\rangle\,\langle n|0'\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\,|n\rangle\,\langle n|0'\rangle\,. \tag{33}$$

Si può a questo punto procedere in vari modi equivalenti. Una possibilità è di osservare che $|0'\rangle$ è uno stato coerente, dato che soddisfa (29), e quindi

$$\langle n|0'\rangle = \frac{\xi^n x_0^n}{\sqrt{n!}}\,\langle 0|0'\rangle\,, \tag{34}$$

dove abbiamo posto $\xi = \sqrt{m\omega/2\hbar}$. Inserendo (34) in (33), vediamo quindi formalmente come l'azione dell'operatore P sia quella di scambiare $(x_0)^n$ con $(-x_0)^n$. Ma questa è la stessa azione della parità poichè in rappresentazione delle coordinate mandare $x - x_0$ in $x + x_0$ equivale a mandare $x - x_0$ in $-x - x_0$, dato che $x + x_0$ e $-x - x_0$ differiscono per una fase pari a -1 se lo stato è dispari, pari a 1 se lo stato è pari.

Un'altra possibilità è di osservare che per un qualsiasi stato $|\psi\rangle$, sviluppando sulla base degli autostati di oscillatore armonico

$$\begin{aligned}\langle x|P|\psi\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \exp(i\pi a^\dagger a)\,\langle x|n\rangle\,\langle n|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(i\pi n)\,\langle x|n\rangle\,\langle n|\psi\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\,\langle x|n\rangle\,\langle n|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle -x|n\rangle\,\langle n|\psi\rangle = \langle -x|\psi\rangle \end{aligned} \tag{35}$$

in cui ci siamo ricordati che le autofunzioni di oscillatore armonico sono a parità alternata, per cui $\langle x|P|n\rangle = \langle -x|n\rangle = (-1)^n\,\langle x|n\rangle$.