Esame di Fisica Moderna: soluzioni

14 novembre 2008

Con il potenziale dato

$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| \le a \\ \infty & |x| \ge a \end{cases}, \tag{1}$$

le autofunzioni dell'hamiltoniana sono

$$\langle x|\psi\rangle = \psi_n(x) = \begin{cases} C\cos\left(\frac{n\pi x}{2a}\right) & n\,\text{dispari} \\ C\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) & n\,\text{pari} \end{cases}, \tag{2}$$

con fattore di normalizzazione $C = \frac{1}{\sqrt{a}}$. L'energia dell'n-esimo autostato è

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{8ma^2}n^2. \tag{3}$$

1. **Valori medi**

   Calcoliamo i valori medi di energia e impulso degli stati:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + i|2\rangle) \tag{4}$$

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle + i|4\rangle) \tag{5}$$

   Nella base delle coordinate, gli stati ψ e ϕ hanno la forma:

$$\langle x|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle x|1\rangle + i\langle x|2\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2a}}\left(\cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) + i\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right), \tag{6}$$

$$\langle x|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle x|2\rangle + i\langle x|4\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2a}}\left(\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right). \tag{7}$$

   Ricordando che il valor medio di p è nullo in qualunque autostato dell'energia, cioè $\langle n|p|n\rangle$, il valor medio dell'impulso risulta essere

$$\langle\psi|p|\psi\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle 1| - i\langle 2|\right)p\left(|1\rangle + i|2\rangle\right) = -\mathrm{Im}\langle 1|p|2\rangle \tag{8}$$

$$\langle\phi|p|\psi\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle 2| - i\langle 4|\right)p\left(|2\rangle + i|4\rangle\right) = -\mathrm{Im}\langle 2|p|4\rangle. \tag{9}$$

   Utilizzando gli integrali dati nel testo troviamo

$$\begin{aligned} -\mathrm{Im}\langle 2|p|4\rangle &= \hbar\int_{-a}^{a}\psi_2(x)^*\frac{d}{dx}\psi_4(x) = \frac{2\pi\hbar}{a^2}\int_{-a}^{a}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) = 0 \\ -\mathrm{Im}\langle 1|p|2\rangle &= \hbar\int_{-a}^{a}\psi_1(x)^*\frac{d}{dx}\psi_2(x) = \frac{\pi\hbar}{a^2}\int_{-a}^{a}\cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) = \\ &= \frac{4}{3}\frac{\hbar}{a}. \end{aligned} \tag{10}$$

Il valor medio dell'energia si determina banalmente osservando che entrambi gli stati dati sono la sovrapposizione equiprobablie di due autostati di energia. Esso è dato da

$$\begin{aligned}\langle\phi|H|\phi\rangle &= \frac{1}{2}(E_2+E_4) = \frac{\hbar^2\pi^2}{8ma^2}\left(\left(\frac{\pi\hbar}{a}\right)^2+\left(\frac{2\pi\hbar}{a}\right)^2\right) = \frac{5}{4}\left(\frac{\pi\hbar}{a}\right)^2, \\ \langle\psi|H|\psi\rangle &= \frac{1}{2}(E_1+E_2) = \frac{1}{4m}\left(\left(\frac{\pi\hbar}{2a}\right)^2+\left(\frac{\pi\hbar}{a}\right)^2\right) = \frac{5}{16}\left(\frac{\pi\hbar}{a}\right)^2. \end{aligned} \tag{11}$$

2. **Misure di energia e impulso**

   Dal momento che lo stato $|\phi\rangle$ è la sovrapposizione di due autostati dell'Hamiltoniana, una misura di energia avrà come risultato uno degli autovalori corrispondenti agli stati $|2\rangle$ e $|4\rangle$; in particolare, supponendo di poter eseguire la misura su più sistemi nel medesimo stato $|\psi\rangle$, otterremo le energie $E_2 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$ ed $E_4 = \frac{2\pi^2\hbar^2}{ma^2}$ con probabilità 1/2.

   Per quanto riguarda le misure di impulso invece, ci sono in tutto quattro risultati possibili ed equiprobabili: infatti, gli stati $|2\rangle$ e $|4\rangle$ sono ciascuno la sovrapposizione equiprobabile di due autostati dell'impulso. Pertanto i quattro possibili risultati della misura di impulso sono

$$+\frac{\pi\hbar}{a},\ -\frac{\pi\hbar}{a},\ +\frac{2\pi\hbar}{a},\ -\frac{2\pi\hbar}{a}, \tag{12}$$

   tutti con probabilità 1/4.

3. **Evoluzione temporale**

   L'evoluzione temporale degli stati $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ si ottiene osservando che essi sono sovrapposizione di autostati dell'energia:

$$\begin{aligned}|\psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-\frac{i}{\hbar}E_1t}|1\rangle + ie^{-\frac{i}{\hbar}E_2t}|2\rangle\right) \\ |\phi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-\frac{i}{\hbar}E_2t}|2\rangle + ie^{-\frac{i}{\hbar}E_4t}|4\rangle\right)\end{aligned} \tag{13}$$

   Procedendo come al punto (1) si ottiene così

$$\begin{aligned}\langle\psi|p|\psi\rangle &= -\mathrm{Im}\langle 1|p|2\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}(E_2-E_1)t} = \frac{4}{3}\left(\frac{\pi\hbar}{a}\right)\cos\left(\frac{i}{\hbar}(E_2-E_1)t\right) \\ &= \frac{4}{3}\left(\frac{\hbar}{a}\right)\cos\left(\frac{3}{8}\frac{\pi^2\hbar}{ma^2}t\right)\end{aligned} \tag{14}$$

   mentre

$$\langle\phi|p|\phi\rangle = -\mathrm{Im}\langle 2|p|4\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}(E_4-E_2)t} = 0. \tag{15}$$

   Sostituendo la eq. (13) nella eq. (11) vediamo inoltre che il valor medio dell'energia è indipendente dal tempo, e dato dalla eq. (11) ad ogni tempo t.

   Il fatto che il valor medio dell'impulso dipenda in generale dal tempo è conseguenza del fatto che il potenziale dato non è invariante per traslazioni. La non-invarianza per traslazioni si può vedere notando che una traslazione sposta il punto in cui il potenziale è centrato. Equivalentemente, p non commuta con $V(x)$ perchè questo dipende da x, seppure in modo discontinuo.

   Il fatto che il valor medio dell'energia, invece, rimanga lo stesso segue dal fatto che la hamiltoniana è invariante per traslazioni temporali.

4. **Matrice densità**

La matrice densità per lo stato ϕ è

$$\rho = |\phi\rangle\langle\phi| = \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}|2\rangle + ie^{-\frac{i}{\hbar}E_4 t}|4\rangle\right)\left(e^{\frac{i}{\hbar}E_2 t}\langle 2| - ie^{\frac{i}{\hbar}E_4 t}\langle 4|\right) \tag{16}$$

che, espressa in termini matriciali nella base degli autostati dell'Hamiltoniana diventa:

$$\rho(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -ie^{\frac{i}{\hbar}(E_4-E_2)t} \\ ie^{-\frac{i}{\hbar}(E_4-E_2)t} & 1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

(sottintendendo che la matrice ha elementi nulli nelle righe e colonne corrispondenti a tutti gli altri autostati di energia).

La matrice densità può essere espressa anche nella base degli autostati dell' impulso, e in questo caso si ha, per le righe e le colonne corrispondenti ai quattro valori dell'impulso eq. (12),

$$\rho(t) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & ie^{\frac{i}{\hbar}(E_4-E_2)t} & -ie^{\frac{i}{\hbar}(E_4-E_2)t} \\ -1 & 1 & ie^{-\frac{i}{\hbar}(E_4-E_2)t} & ie^{-\frac{i}{\hbar}(E_4-E_2)t} \\ -ie^{-\frac{i}{\hbar}(E_4-E_2)t} & -ie^{\frac{i}{\hbar}(E_4-E_2)t} & 1 & -1 \\ ie^{-\frac{i}{\hbar}(E_4-E_2)t} & -ie^{\frac{i}{\hbar}(E_4-E_2)t} & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

Vediamo così che le probabilità di trovare ciascuno dei quattro valori dell'impulso dati è 1/4 ad ogni tenpo t, consistentemente col risultato eq. (15) che dice che il valor medio di p in questo stato non dipende dal tempo.

In seguito alla misura dell'impulso, lo stato precipita in uno dei quattro stati impulso determinato: $|2+\rangle$, $|2-\rangle$, $|4+\rangle$ e $|4-\rangle$. Supponiamo che la misura corrisponda all'autovalore di $|2+\rangle$. La matrice densità a questo punto diventa semplicemente $|2+\rangle\langle 2+|$. Subito dopo la misura, avendo misurato un'osservabile (l'impulso) il cui operatore corrispondente non commuta con l'Hamiltoniana, lo stato diviene una sovrapposizione di autostati di energia.

5. **Parità I**

Gli autovalori dell'operatore parità sono ± 1, infatti, dalla relazione:

$$\langle x|\mathcal{P}|\psi\rangle = \langle -x|\psi\rangle \tag{19}$$

segue

$$\mathcal{P}^2 = \mathbf{1}. \tag{20}$$

Se $|\lambda\rangle$ è un autostato di $\mathcal{P}$, lo è anche di $\mathcal{P}^2$, e si ha

$$\langle\lambda|\mathcal{P}^2|\lambda\rangle = \lambda^2 \tag{21}$$

quindi la eq. (20) implica $\lambda = \pm 1$.

Gli autovalori di $\mathcal{P}$ sono conservati se e solo se $\mathcal{P}$ commuta con l'hamiltoniana. Dalla definizione di $\mathcal{P}$ segue che $[\mathcal{P}, H] = 0$ se e solo se

$$H(x) = H(-x). \tag{22}$$

Nel nostro caso, questo è vero sia prima, che dopo lo spostamento delle pareti perhcè il potenziale è sempre simmetrico attorno all origine. Ne segue che l'autovalore di $\mathcal{P}$ è conservato ad ogni tempo t.

6. **Parità II**

L'energia misurata corrisponde allo stato fondamentale $|1\rangle$, quindi la probabilità che, dopo aver modificato il potenziale, una seconda misura riveli il sistema nel nuovo autostato $\overline{|2n\rangle}$ è pari a $\overline{\langle 2n}|1(t)\rangle$. Tuttavia, lo stato $|1(t)\rangle$ è pari (è uno coseno), mentre gli stati $\overline{|2n\rangle}$ sono dispari (sono seni), cioè il primo è associato ad un autovalore di $\mathcal{P}$ uguale a $+1$ ed i secondi ad un autovalore uguale a -1. Ma come dimostrato al punto precedente l'autovalore di $\mathcal{P}$ si conserva, quindi la probabilità è nulla. Più formalmente

$$\overline{\langle 2n}|1(t)\rangle = \overline{\langle 2n}|\mathcal{P}^2|1(t)\rangle = -\overline{\langle 2n}|1(t)\rangle = 0. \tag{23}$$

7. **Parità III**

Calcoliamo la probabilità che il sistema nello stato $|1\rangle$ venga rilevato al tempo t nel nuovo autostato $|\overline{n}\rangle$ con n dispari, cioe' $|\overline{2}n+1\rangle$. Ricordando che la funzione d'onda di partenza si annulla per $|x| \geq a$ ed indicando con E_n l'energia dello stato $|\overline{2}n+1\rangle$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
\langle\overline{n}|1(t)\rangle &= e^{\frac{1}{i\hbar}E_n t}\overline{\langle 2n+1}|1\rangle = e^{\frac{1}{i\hbar}E_n t}\frac{1}{a\sqrt{2}}\int_{-a}^{a}\cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right)\cdot\cos\left(\frac{n\pi x}{4a}\right) = & (24)\\
&= e^{\frac{1}{i\hbar}E_n t}\frac{1}{4a\sqrt{2}}\int_{-a}^{a}\left(e^{i\frac{\pi x}{2a}}+e^{-i\frac{\pi x}{2a}}\right)\left(e^{i\frac{n\pi x}{4a}}+e^{-i\frac{n\pi x}{4a}}\right) = \\
&= \frac{e^{\frac{1}{i\hbar}E_n t}}{4a\sqrt{2}}\int_{-a}^{a}\left(e^{i\frac{(n+2)\pi x}{4a}}+e^{-i\frac{(n+2)\pi x}{4a}}+e^{i\frac{(n-2)\pi x}{4a}}+e^{-i\frac{(n-2)\pi x}{4a}}\right) = \\
&= \frac{e^{\frac{1}{i\hbar}E_n t}}{2a\sqrt{2}}\int_{-a}^{a}\left(\cos\left(\frac{(n+2)\pi x}{4a}\right)+\cos\left(\frac{(n-2)\pi x}{4a}\right)\right) = \\
&= \frac{e^{\frac{1}{i\hbar}E_n t}}{2a\sqrt{2}}\left(\frac{4a}{\pi}\right)\left[\frac{\sin\left(\frac{(n+2)\pi x}{4a}\right)}{n+2}+\frac{\sin\left(\frac{(n-2)\pi x}{4a}\right)}{n-2}\right]_{-a}^{a} = \\
&= \frac{e^{\frac{1}{i\hbar}E_n t}}{a\sqrt{2}}\left(\frac{4a}{\pi}\right)\left[\frac{\sin\left(\frac{(n+2)\pi}{4}\right)}{n+2}+\frac{\sin\left(\frac{(n-2)\pi}{4}\right)}{n-2}\right] = \\
&= \frac{e^{\frac{1}{i\hbar}E_n t}}{a\sqrt{2}}\left(\frac{4a}{\pi}\right)\sin\left(\frac{(n-2)\pi}{4}\right)\left[\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+2}\right] = \\
&= \frac{e^{\frac{1}{i\hbar}E_n t}}{a\sqrt{2}}\left(\frac{4a}{\pi}\right)\sin\left(\frac{(n-2)\pi}{4}\right)\left(\frac{4}{n^2-4}\right) & (25)
\end{aligned}$$

quindi il modulo quadro dell'ampiezza risulta essere

$$|\langle\overline{n}|1(t)\rangle|^2 = \left(\frac{8/\pi}{n^2-2}\right)^2 \tag{26}$$