Traccia di soluzione

Fisica moderna – 21-9-2010

1) I valori medi degli operatori $\hat{x}$, $\hat{p}$ si determinano immediatamente, notando che $\hat{x}$ e $\hat{p}$ sono dispari sotto parità ($x \to -x$) mentre lo stato dato è pari, il che implica

$$\langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{p}|\psi\rangle = 0 \qquad (1)$$

Il valore medio di $\hat{x}^2$ è dato da

$$\langle\psi|\hat{x}^2|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}}\, x^2 e^{-\gamma x^2} = \frac{1}{2\gamma} \qquad (2)$$

Il valore medio di p^2 è dato da

$$\langle\psi|\hat{p}^2|\psi\rangle = -\hbar^2 \int dx \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}}\, e^{-\gamma/2\, x^2} \frac{d^2}{dx^2} e^{-\gamma/2\, x^2}$$

$$= -\hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}}\, e^{-\gamma/2\, x^2} \frac{d}{dx}\left(\gamma x\, e^{-\gamma/2\, x^2}\right)$$

$$= -\hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}}\, e^{-\gamma x^2}\left(-\gamma + \gamma^2 x^2\right) =$$

$$= \hbar^2\left(\gamma - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\hbar^2 \gamma}{2} \qquad (3)$$

2) Si può procedere in diversi modi, visti a lezione.
Forse il più semplice è notare che le eq. del moto per $\hat{x}, \hat{p}$ coincidono con quelle classiche (teor. di Ehrenfest):

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{x}_H}{dt} = m\,\hat{p}_H \\[2ex] \dfrac{d\hat{p}_H}{dt} = -m\omega^2 x_H \end{cases} \tag{4}$$

Procedendo come nel caso classico si trova, sost. la 1ª eq. nella 2nda

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = -\omega^2 x_H \tag{5}$$

da cui

$$x_H(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{6}$$

$$p_H(t) = -\omega m(A\sin\omega t - B\cos\omega t) \tag{7}$$

e, ponendo
$$\begin{cases} x_H(0) = A = x_S & (8) \\ p_H(0) = mB\omega = p_S & (9) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_H(t) = x_S\cos\omega t + \dfrac{p_S}{m\omega}\sin\omega t & (10) \\[2ex] p_H(t) = -m\omega\, x_S \sin\omega t + p_S\cos\omega t & (11) \end{cases}$$

3) Anche in questo caso si può procedere in molti modi. Forse il più semplice è notare che

$$\langle \psi | O | \psi \rangle = z \tag{12}$$

dove z è un numero immaginario puro, poiché $\langle x | \psi \rangle = \psi(x)$ è reale e, ovviamente

$$\langle \psi | x p | \psi \rangle = \int dx \, \psi^*(x) \, x (-i\hbar) \frac{d}{dx} \psi(x) \tag{13}$$

La eq. (12) implica che

$$\langle \psi | O^\dagger | \psi \rangle = z^* \tag{14}$$

Ma se z è immaginario puro ne segue che

$$z^* = -z \,. \tag{15}$$

D'altra parte, O è manifestamente hermitiano:

$$O^\dagger = (px + xp)^* = (x^\dagger p^\dagger + p^\dagger x^\dagger) = O \tag{16}$$

Quindi

$$z^* = z \tag{17}$$

Le eq. (15) e (16) possono essere vere simultaneamente se e solo se

$$z = 0 \,, \tag{18}$$

q.e.d.

4) Usando le eq. (10–11) si ha

$$x^2(t) = x_s^2 \cos^2\omega t + \frac{p_s^2}{(m\omega)^2}\sin^2\omega t + \frac{\sin\omega t\cos\omega t}{m\omega}\left(x_s p_s + p_s x_s\right) \qquad (19)$$

$$p^2(t) = p_s^2\cos^2\omega t + m^2\omega^2 x_s^2 \sin^2\omega t - m\omega\sin\omega t\cos\omega t\left(x_s p_s + p_s x_s\right) \qquad (20)$$

Pertanto

$$\langle\psi|\, x^2(t)\,|\psi\rangle = \frac{1}{2\gamma}\cos^2\omega t + \frac{\hbar^2\gamma}{2(m\omega)^2}\sin^2\omega t \qquad (21)$$

$$\langle\psi|\, p^2(t)\,|\psi\rangle = \frac{\hbar^2\gamma}{2}\cos^2\omega t + \frac{m^2\omega^2}{2\gamma}\sin^2\omega t \qquad (22)$$

dove abbiamo usato le eq. (2), (3) e (18)

5) La probabilità è

$$P_0 = |\langle\psi_0|\psi\rangle|^2 \qquad (23)$$

dove

$$\langle x|\psi_0\rangle = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2} \qquad (24)$$

$$= \left(\frac{m\gamma_0}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{1}{2}\gamma_0 x^2} \qquad (26)$$

è la funzione d'onda dello stato fondamentale dell'oscillatore armonico, e nell'ultimo passaggio abbiamo definito

$$\gamma_0 \equiv \frac{m\omega}{\hbar} \qquad (27)$$

Si ha

$$\langle \psi | \psi \rangle = \sqrt{\frac{m}{\pi}}\,(\gamma\gamma_0)^{1/4}\int_{-\infty}^{\infty} dx \; e^{-\frac{1}{2}(\gamma+\gamma_0)x^2} = \qquad (28)$$

$$= (\gamma\gamma_0)^{1/4}\sqrt{\frac{2}{\gamma+\gamma_0}} \qquad (28)$$

e quindi

$$P = \frac{2}{\gamma+\gamma_0}\sqrt{\gamma\gamma_0} \qquad (29)$$

Se la misura al tempo t_0 rivela il sistema nello stato fondamentale, dopo la misura esso si trova nello stato $|u_0\rangle$. Poiché tale stato è un autostato dell'energia, il valor medio di qualunque operatore in esso è indipendente dal tempo. Si ha perciò

$$\langle x \rangle (t) = \langle x \rangle (0) = 0 \qquad (30)$$

$$\langle p \rangle (t) = \langle p \rangle (0) = 0 \qquad (31)$$

$$\langle x^2 \rangle (t) = \langle x^2 \rangle (0) = \frac{1}{2\gamma_0} \qquad (32)$$

$$\langle p^2 \rangle (t) = \langle p^2 \rangle (0) = \frac{\hbar^2\gamma_0}{2} \qquad (32)$$

dove abbiamo osservato che lo stato $|u_0\rangle$ è della forma data nella eq. (2) dell'enunciato ma con $\gamma = \gamma_0$, ed abbiamo usato le eq. (1) e (3).

6) Visto che $\langle x\rangle = \langle p\rangle = 0$ per ogni t abbiamo che

$$\Delta^2 x\, \Delta^2 p = \langle x^2\rangle(t)\, \langle p^2\rangle(t) =$$

$$= \frac{\hbar^2}{4}\left(\sin^4 \omega t + \cos^4 \omega t\right) + \sin^2\omega t \cos^2 \omega t \left(\frac{m^2\omega^2}{4\gamma^2} + \frac{\hbar^4\gamma^2}{4m^2\omega^2}\right)$$

$$= \frac{\hbar^2}{4}\left(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t\right)^2 + \sin^2\omega t\cos^2\omega t\left(\frac{m^2\omega^2}{4\gamma^2} + \frac{\hbar^4\gamma^2}{4m^2\omega^2} - \frac{\hbar^2}{2}\right)$$

$$= \frac{\hbar^2}{4} + \sin^2\omega t \cos^2\omega t\left(\frac{m\omega}{2\gamma} - \frac{\hbar^2\gamma}{2m\omega}\right)^2 \qquad (34)$$

Si vede immediatamente che ~~il~~ il membro di destra della eq. (34) é minimo quando

$$\frac{m\omega}{2\gamma} = \frac{\hbar^2\gamma}{2m\omega} \qquad (35)$$

cioé (ricordando che γ é reale positivo)

$$\gamma = \frac{m\omega}{\hbar} = \gamma_0 \qquad (36)$$

con γ_0 dato dalla eq. (27).

Il risultato si giustifica osservando che lo stato $\psi(x)$ é sempre uno stato di minima indeterminazione al tempo $t=0$, in quanto esso é un pacchetto gaussiano per qualunque valore di γ. Tuttavia, se e solo se $\gamma = \gamma_0$ tale stato é un autostato dell'hamiltoniana, e quindi solo in tal caso esso ~~è~~ resta un pacchetto gaussiano, e quindi uno stato di minima indeterminazione, per ogni tempo t.