Esame scritto di fisica moderna

Traccia di soluzione

25 Settembre 2012

- **(1)** Calcoliamo i valori medi per l'operatore posizione:

$$\langle x\rangle \;=\; \langle\psi|x|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)x\psi(x)dx = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\alpha x^2}dx = 0\ , \tag{1}$$

in quanto integrale di funzioe dispari su un dominio pari, e

$$\langle x^2\rangle = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2}dx = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} = \frac{1}{2\alpha}\ , \tag{2}$$

quindi l'indeterminazione è

$$\Delta^2 x = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = 1/(2\alpha). \tag{3}$$

Analogamente procediamo per l'operatore impulso,

$$\langle p\rangle = \langle\psi|p|\psi\rangle = -i\hbar\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)\frac{\partial}{\partial x}\psi(x)dx = -i\hbar\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[ik_0e^{-\alpha x^2} - \alpha x e^{-\alpha x^2}\right]dx = \hbar k_0\ , \tag{4}$$

$$\langle p^2\rangle = \langle\psi|p^2|\psi\rangle = \cdots = \hbar^2(k_0^2 + \frac{\alpha}{2})\ , \tag{5}$$

(vedere gli appunti per i passaggi intermedi) da cui

$$\Delta^2 p = \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2 = \hbar^2\alpha/2. \tag{6}$$

- **(2)** In rappresentazione di Heisenberg abbiamo che:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-i}{\hbar}[x,H] = \frac{-i}{\hbar}[x,\frac{p^2}{2m}] = \frac{p}{m}\ , \tag{7}$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{-i}{\hbar}[p,H] = \frac{-i}{\hbar}[p,\frac{p^2}{2m}] = 0\ , \tag{8}$$

da cui

$$p(t) = p(0)\ , \qquad x(t) = x(0) + \frac{p(0)}{m}t\ . \tag{9}$$

Poichè l'impulso è una costante del moto, sia il suo valor medio che la sua indeterminazione si conservano:

$$\langle p(t)\rangle = \langle p(0)\rangle = \hbar k_0\ , \qquad \Delta^2 p(t) = \Delta^2 p(0) = \hbar^2\alpha/2\ . \tag{10}$$

Il valor medio della posizione ed il suo quadrato dipendono dal tempo come

$$\langle x(t)\rangle = \langle x(0)\rangle + \langle p(0)\rangle\frac{t}{m} = \frac{\hbar k_0 t}{m}\ , \quad \langle x^2(t)\rangle = \langle(x(0)+p(0)\frac{t}{m})^2\rangle = \frac{1}{2\alpha} + \hbar^2(k_0^2+\frac{\alpha}{2})\frac{t^2}{m^2}, \tag{11}$$

dove si è fatto uso del fatto che, per un pacchetto gaussiano,

$$\langle x(0)p(0) + p(0)x(0)\rangle = 2\mathrm{Re}\langle x(0)p(0)\rangle = \langle x(0)\rangle\langle p(0)\rangle. \tag{12}$$

Ne segue che al tempo t l'indeterminazione in posizione è data da

$$\Delta^2 x(t) = \langle x^2(t)\rangle - \langle x(t)\rangle^2 = \frac{1}{2\alpha} + \hbar^2 \frac{\alpha}{2}\frac{t^2}{m^2} \ . \tag{13}$$

- **(3)** La dipendenza temporale si può determinare sviluppando lo stato su una base di autostati dell'hamiltoniana:

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle = \int dE \langle x|E\rangle\langle E|\psi\rangle \ . \tag{14}$$

Si ha

$$\psi(x,t) = \langle x|\psi,t\rangle = \int dE \langle x|E\rangle\langle E|e^{-iHt/\hbar}|\psi\rangle = \int dE e^{-iEt/\hbar}\langle x|E\rangle\langle E|\psi\rangle \ . \tag{15}$$

Nel caso della particella libera $H = \frac{p^2}{2m}$ e gli autostati dell'energia sono anche autostati dell'impulso

$$\psi(x,t) = \int dk \langle x|k\rangle\langle k|e^{-iHt/\hbar}|\psi\rangle = \int dk e^{-i\hbar k^2 t/(2m)} e^{ikx}\tilde{\psi}(k) \ , \tag{16}$$

dove

$$\tilde{\psi}(k) = \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx}\psi(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} e^{ik_0 x} e^{-\alpha x^2/2} = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} e^{-(k-k_0)^2/(2\alpha)} \tag{17}$$

- **(4)** Possiamo riscrivere l'espressione di $\psi(x,t)$ ottenuta nel punto precedente come

$$\psi(x,t) = \left(\frac{1}{\pi\alpha}\right)^{1/4} \int dk e^{-i\hbar k^2 t/(2m)} e^{ikx} e^{-(k-k_0)^2/(2\alpha)}. \tag{18}$$

Cambiando variabile d'integrazione $k \to k + k_0$ si trova

$$\begin{aligned} \psi(x,t) &= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} e^{ik_0 x} \int dk e^{-i\hbar (k+k_0)^2 t/(2m)} e^{ikx} e^{-k^2/(2\alpha)} \\ &= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} e^{ik_0 x} e^{-i\hbar k_0^2 t/(2m)} \int dk e^{ik(x - \hbar k_0 t/m)} e^{-(1+i\hbar t\alpha/m)k^2/(2\alpha)}. \end{aligned} \tag{19}$$

Confrontando questa espressione con la sua forma quando $t = 0$

$$\psi(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} e^{ik_0 x} \int dk e^{ikx} e^{-k^2/(2\alpha)} \tag{20}$$

si vede immediatamente che

$$\lambda(t) = \hbar k_0^2 t/(2m) \ , \quad z(t) = (1 + i\hbar t\alpha/m) \ . \tag{21}$$

- **(5)** La densità di probabilità per una misura di posizione è data da

$$\mathcal{P}(x,t) = |\langle x|\psi,t\rangle|^2 = |\psi(x,t)|^2 = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi|z(t)|^2}} e^{-\alpha\, x(t)^2/|z(t)|^2} \ , \tag{22}$$

ed è quindi una gaussiana, la cui semilarghezza al tempo $t = 0$ dà l'indeterminazione di una misura Eq. (3). Ma la larghezza della gaussiana Eq. (22) al tempo t è $\frac{\alpha}{|z(t)|^2}$, da cui segue immediatamente che al tempo t l'indeterminazione è data da

$$\Delta^2 x(t) = \frac{|z(t)|^2}{2\alpha} = \frac{1}{2\alpha} + \hbar^2 \frac{\alpha}{2} \frac{t^2}{m^2} \ , \tag{23}$$

che coincide con il risultato trovato al punto (2).

- **(6)** L'equazione di Schrödinger implica che

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle, \tag{24}$$

per cui

$$\langle\psi(t)|i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \langle\psi(t)|H|\psi(t).\rangle \tag{25}$$

Usando la forma esplicita dell'hamiltoniana di particella libera $H = \frac{p^2}{2m}$ si ha

$$\langle\psi,t|i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi,t\rangle = \frac{1}{2m}\langle\psi,t|p^2|\psi,t\rangle \tag{26}$$

e quindi, ricordando la Eq. (5),

$$\langle\psi(t)|i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \frac{\hbar^2(k_0^2+\alpha/2)}{2m}. \tag{27}$$

- **(7)** Al tempo $t = 0$ la densità di probabilità di posizione Eq. (22) nel limite diventa una gaussiana infinitamnte stretta, ma di cui si preserva la normalizzazione. Pertanto, l'indeterminazione di una misura di posizione tende a zero. Questo significa che nel limite

$$\lim_{\alpha\to\infty} \mathcal{P}(x,0) = \lim_{\alpha\to\infty} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha x^2} = \delta(x) \ . \tag{28}$$

A qualunque altro tempo t si trova

$$\lim_{\alpha\to\infty} \mathcal{P}(x,t) = \lim_{\alpha\to\infty} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi(1+(\hbar t\alpha/m)^2)}} e^{-\alpha x(t)^2/(1+(\hbar t\alpha/m)^2)} = 0 \ , \quad (\text{se } t \neq 0) \ , \tag{29}$$

cioè la probabilità di posizione è nulla dappertutto, ossia l'indeterminazione di posizione diventa infinita, coerentemente con la Eq.(13). Possiamo capire questo come conseguenza del principio di indeterminazione: al tempo $t = 0$ poichè l'indeterminazione in posizione è nulla, l'impulso ha indeterminazione infinita $\Delta p(t = 0) = \infty$. Ne segue che a qualunque tempo $t > 0$ lo stato si sparpaglia in tutto lo spazio e diventa completamente indeterminato in posizione.