ESAME SCRITTO DI FISICA MODERNA

21 settembre 2018

Traccia di soluzione

Le autofunzioni della buca infinita di potenziale simmetrica rispetto all'origine sono date da $\varphi_n(x) = C\cos(k_n x)$ per valori di n dispari e da $\varphi_n(x) = C\sin(k_n x)$ per valori di n pari, dove

$$k_n = \frac{n\pi}{2L}, \quad E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{8mL^2}, \tag{1}$$

e la costante di normalizzazione C può essere calcolata usando la prima linea di integrali forniti nel testo, con risultato $C = 1/\sqrt{L}$.

(1) Il valore medio di x nello stato $|\psi_1\rangle$ è dato da

$$\langle\psi_1|x|\psi_1\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle 1|x|1\rangle + \langle 2|x|2\rangle + 2\langle 1|x|2\rangle\right), \tag{2}$$

dove si è sfruttato il fatto che $\langle 1|x|2\rangle = \langle 2|x|1\rangle$ e la realtà dei coefficienti. Per parità i primi due termini nella parentesi sono nulli (in quanto prodotto di x e di un seno o di un coseno al quadrato sotto integrale), mentre il termine misto è esattamente dato dal secondo integrale fornito nel testo. Il risultato finale è quindi:

$$\langle\psi_1|x|\psi_1\rangle = \frac{32L}{9\pi^2}. \tag{3}$$

Per quanto riguarda il valore medio di x nello stato $|\psi_2\rangle$ esso è nullo poichè i termini diagonali sono nulli come prima per ragioni di parità, mentre il termine misto è proporzionale all'integrale

$$\int_{-L}^{+L} \mathrm{d}x\, x \cos\left(\frac{3\pi x}{2L}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) = 0, \tag{4}$$

che si annulla sempre per ragioni di parità.

I valori medi di H sono invece immediati da calcolare in quanto i due stati forniti nel testo sono combinazioni lineari di autostati di H stesso. Pertanto abbiamo:

$$\langle\psi_1|H|\psi_1\rangle = \frac{1}{2}E_1 + \frac{1}{2}E_2 = \frac{1}{2}(1+4)\frac{\pi^2\hbar^2}{8mL^2} = \frac{5\pi^2\hbar^2}{16mL^2}, \tag{5}$$

$$\langle\psi_1|H|\psi_1\rangle = \frac{1}{3}E_1 + \frac{2}{3}E_3 = \frac{1}{3}(1+9*2)\frac{\pi^2\hbar^2}{8mL^2} = \frac{19\pi^2\hbar^2}{24mL^2}. \tag{6}$$

(2) Poichè come già notato gli stati $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ sono autofunzioni dell'hamiltoniana, una misura di energia rivela il sistema in uno dei due stati di cui essi sono combinazione lineare con probabilità date dal modulo quadro dei coefficienti. In dettaglio, i possibili risultati di una misura di energia su $|\psi_1\rangle$ sono E_1 ed E_2 con probabilità rispettivamente $1/2$ e $1/2$, e il sistema dopo la misura si troverà rispettivamente in $|1\rangle$ o in $|2\rangle$. Analogamente, i possibili risultati di una misura di energia su $|\psi_2\rangle$ sono E_1 ed E_3 con probabilità rispettivamente $1/3$ e $2/3$, e il sistema dopo la misura si troverà rispettivamente in $|1\rangle$ o in $|3\rangle$.

Per quanto riguarda invece una misura di posizione, i risultati possibili della misura sono tutte le posizioni $-L \leq x \leq L$ tali che la funzione d'onda non sia nulla. Se il sistema è nello stato $|\psi_1\rangle$, la densità di probabilità nello spazio delle posizioni è data da $|\langle x|\psi_1\rangle|^2$, ovvero:

$$||\langle x|\psi_1\rangle|^2 = \frac{1}{2}\left(|\varphi_1(x)|^2 + |\varphi_2(x)|^2 + 2\varphi_1(x)\varphi_2(x)\right). \tag{7}$$

Dopo la misura il sistema si trova nell'autostato della posizione x_0 corrispondente al valore x_0 misurato, cioé $\psi_{x_0}(x) = \delta(x - x_0)$. Analogamente quando il sistama è nello stato $|\psi_2\rangle$.

(3) Vedere la sezione 6.1.3 del libro di testo.

(4) Lavorando in rappresentazione di Schrodinger, calcoliamo innanzitutto l'evoluzione temporale ad un tempo t generico per il sistema che al tempo $t = 0$ si trova nello stato $|\psi_1\rangle$:

$$\begin{aligned} |\psi_1(t)\rangle &= \exp\left(-\frac{i}{\hbar}Ht\right)|\psi_1(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}|2\rangle\,; \\ \langle x|\psi_1(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2L}}\left(\exp\left(-\frac{i\pi^2\hbar}{8mL^2}t\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) + \exp\left(-\frac{4i\pi^2\hbar}{8mL^2}t\right)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Il valor medio di p è quindi

$$\langle\psi_1(t)|p|\psi_1(t)\rangle = \int_{-L}^{+L} \mathrm{d}x\,\psi_1^*(t,x)\left(-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\psi_1(t,x). \tag{9}$$

La derivata sotto integrale è

$$\frac{\mathrm{d}\psi_1(t,x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{2L}}\left(-\frac{\pi}{2L}\exp\left(-\frac{i\pi^2\hbar}{8mL^2}t\right)\sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right) + \frac{\pi}{L}\exp\left(-\frac{4i\pi^2\hbar}{8mL^2}t\right)\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right). \tag{10}$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \langle\psi_1(t)|p|\psi_1(t)\rangle = \frac{-i\hbar}{2L}\int_{-L}^{+L}\mathrm{d}x\,\Bigg(&-\frac{\pi}{2L}\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right) + \frac{\pi}{L}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \\ &+\frac{\pi}{L}\exp\left(+\frac{i\pi^2\hbar}{8mL^2}t\right)\exp\left(-\frac{4i\pi^2\hbar}{8mL^2}t\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \\ &-\frac{\pi}{2L}\exp\left(+\frac{4i\pi^2\hbar}{8mL^2}t\right)\exp\left(-\frac{i\pi^2\hbar}{8mL^2}t\right)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\Bigg) \end{aligned}, \tag{11}$$

in cui i due termini sulla prima linea una volta integrati danno risultato nullo per ragioni di parità, mentre per i termini sulla seconda e sulla terza linea possiamo usare i risultati forniti nel testo. Il risultato finale è

$$\langle\psi_1(t)|p|\psi_1(t)\rangle = \frac{-i\hbar}{2L}\left(\frac{\pi}{L}\exp\left(-\frac{3i\pi^2\hbar}{8mL^2}t\right)\frac{4L}{3\pi} - \frac{\pi}{2L}\exp\left(+\frac{3i\pi^2\hbar}{8mL^2}t\right)\frac{8L}{3\pi}\right) = -\frac{4\hbar}{3L}\sin\left(\frac{3\pi^2\hbar}{8mL^2}t\right). \tag{12}$$

(5) Usiamo la rappresentazione di Heisenberg per trovare i valori medi di posizione e di impulso. Dato che per $t > 0$ il sistema è libero, la dipendenza temporale degli operatori p e t è data da:

$$p(t) = p_0 \tag{13}$$

$$x(t) = x_0 + \frac{p_0}{m}t \tag{14}$$

Per il sistema dato, $p_0 = \langle 1|p|1\rangle$ e $x_0 = \langle 1|x|1\rangle$,e quindi

$$x(t) = p(t) = 0 \tag{15}$$

per ogni tempo t.

L'indeterminazione al tempo t è data da

$$\begin{aligned} \Delta^2 x(t) &= \langle\left(x_0 + \frac{t}{m}p_0\right)^2\rangle - \langle x_0 + \frac{t}{m}p_0\rangle^2 \\ &= \langle x_0^2\rangle - \langle x_0\rangle^2 + \frac{t^2}{m^2}\left(\langle p_0^2\rangle - \langle p_0\rangle^2\right) + \frac{t}{m}\Big(\langle x_0p_0 + p_0x_0\rangle - 2\langle x_0\rangle\langle p_0\rangle\Big) \qquad (16) \\ &= \Delta^2 x_0 + \frac{t^2}{m^2}\Delta^2 p_0 + \frac{t}{m}2\mathrm{Re}\Big(\langle x_0p_0\rangle - \langle x_0\rangle\langle p_0\rangle\Big), \qquad (17) \end{aligned}$$

dove $\Delta^2 x_0$ e $\Delta^2 p_0$ sono le indeterminazioni al tempo iniziale, e abbiamo ricordato che l'anticommutatore di due operatori è pari a due volte la sua parte reale. Ma è facile verificare che per una funzione d'onda puramente reale si ha

$$\mathrm{Re}\Big(\langle x_0 p_0\rangle - \langle x_0\rangle\langle p_0\rangle\Big) = 0 \tag{18}$$

e dunque

$$\Delta^2 x(t) = \Delta^2 x_0 + \frac{t^2}{m^2}\Delta^2 p_0. \tag{19}$$

(6) Un sistema che si trova in uno stato $|\psi\rangle$ viene rivelato in un autostato di energia $|E\rangle$ con probabilità pari a $|\langle E|\psi\rangle|^2$. Il sistema dato evolve secondo una hamiltoniana di particella libera a partire dal tempo t, e quindi gli autostati di energia sono le onde piane (se scelti anche come autostati dell'impulso) o i seni ed i coseni (se scelti anche come autostati della parità). Conviene fare quest'ultima scelta, ed in tal caso si ha lo spettro dopppiamente degenere

$$\langle x|E^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos k_E x \tag{20}$$

$$\langle x|E^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin k_E x \tag{21}$$

con $E = \frac{\hbar^2 k_E^2}{2m}$. È facile vedere che

$$\langle E^-|1\rangle = 0 \tag{22}$$

per parità.

Si ha tuttavia $\langle E^+|1\rangle \neq 0$ per ogni E. Pertanto, una misura di energia può dare qualunque valore reale non negativo $0 \leq E \leq \infty$, con ampiezza di probabilità pari a

$$\langle E^+|1\rangle = \int_{-L}^{L} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\pi L}}\cos(kx)\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) = \sqrt{\frac{L}{\pi}}\frac{4\pi\cos(kL)}{\pi^2 - 4k^2L^2}, \tag{23}$$

e probabilità $P(E) = |\langle E^+|1\rangle|^2$.

Il sistema è manifestamente invariante per traslazioni temporali, e quindi questo risultato vale a tutti i tempi $t \geq 0$

(7) L'ampiezza di probabilità per una misura della posizione si ottiene usando una risoluzione dell'identità:

$$\begin{aligned}\langle x|1\rangle &= \int_0^\infty dE\langle x|E^+\rangle e^{-i\frac{E}{\hbar}}\langle E^+|1\rangle \\ &= \int_0^\infty dE e^{-i\frac{E}{\hbar}}\cos(k_E x)\frac{4\sqrt{\pi}\cos(kL)}{\pi^2 - 4k^2L^2}.\end{aligned} \tag{24}$$

La probabilità di rivelare il sistema in x è $P(x) = |\langle x|1\rangle|^2$. Per tempo $t > 0$ questa probabilità è nonnulla per ogni x e quindi la misura può rivelare il sistema in qualunque posizione $-\infty \leq x \leq \infty$
.