Soluzione dell'esame di FISICA QUANTISTICA del 23 gennaio 2023

(1)

Dobbiamo calcolare

$$\langle x \rangle = \langle \psi | x | \psi \rangle. \tag{1}$$

Abbiamo

$$\langle \psi | x | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi(x)|^2 = |N|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx x \left(e^{-\alpha(x+x_0)^2} + e^{-\alpha(x-x_0)^2} + 2\cos(k_0 x) e^{-\alpha(x^2+x_0^2)} \right). \tag{2}$$

Si può osservate che l'ultimo termine dentro la parentesi è pari e quindi quando lo si moltiplica per x diventa dispari. Quindi il suo integrale darà zero. Guardando i primi due termini della parentesi si può notare che la loro somma è una funzione pari (è un coseno iperbolico). Quindi anche in questo caso quando si moltiplica per x si ha un integrando dispari, il cui integrale mi dà zero. Ne segue che

$$\langle x \rangle = 0. \tag{3}$$

Il sistema dato è la sovrapposizione di due pacchetti gaussiani localizzati in $\pm x_0$ in posizione e rispettivamente in $\pm k_0$ in impulso. La densità di probabilitá di posizione ha la forma mostrata in Fig. 1, con i due picchi localizzati in $\pm x_0$.

(2)

Dobbiamo calcolare

$$\langle p \rangle = \langle \psi | p | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(x). \tag{4}$$

In questo caso possiamo notare che la funzione $\psi(x)$ è pari, quindi la sua derivataè una funzione dispari. Moltiplicando per $\psi^*(x)$, che è una funzione pari, si ottiene una funzione dispari. Quindi anche in questo caso ci si riduce all'integrale di una funzione dispari integrata su dominio simmetrico rispetto all'origine. Ne segue che

$$\langle p \rangle = 0. \tag{5}$$

La densità di probabilitá di impulso ha anch'essa la forma mostrata in Fig. 1, con i due picchi localizzati in $\pm k_0$.

(3)

Dobbiamo calcolare

$$\langle \Delta^2 x \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle = \langle x^2 \rangle = \langle \psi | x^2 | \psi \rangle, \tag{6}$$

dove nella penultima uguaglianza abbiamo usato la Eq. (3). In questo caso la normalizzazione di ψ è

$$1 = \langle \psi | \psi \rangle = |N|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx 4 e^{-\alpha x^2} = 4|N|^2 \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}. \tag{7}$$

Quindi

$$|N|^2 = \frac{1}{4\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}}. \tag{8}$$

Ora dobbiamo calcolare

$$\langle \psi | x^2 | \psi \rangle = 4|N|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{-\alpha x^2} = 4|N|^2 \left(-\frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} \tag{9}$$

$$= 4|N|^2 \left(-\frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}} \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{1}{2\alpha}. \tag{10}$$

(4)

Dobbiamo calcolare

$$\langle \Delta^2 p \rangle = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle = \langle p^2 \rangle = \langle \psi | p^2 | \psi \rangle, \tag{11}$$

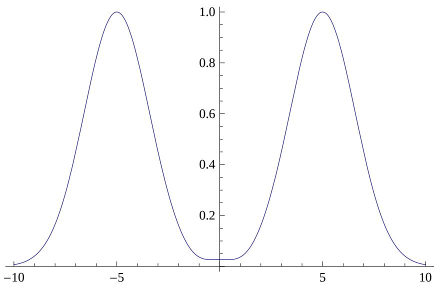

Figure 1: Forma qualitativa dell densità di probabilità di posizione o di impulso per una sovrapposizione di pacchetti ben separati.

dove nella penultima uguaglianza abbiamo usato la Eq. (4). Ora dobbiamo calcolare

$$\frac{\langle\psi|p^2|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = 4|N|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2/2} (-i\hbar)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) e^{-\alpha x^2/2} \tag{12}$$

$$= 4|N|^2(-i\hbar)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2/2} \left(-\alpha e^{-\alpha x^2/2} + \alpha^2 x^2 e^{-\alpha x^2/2}\right) = 4|N|^2(-i\hbar)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(-\alpha e^{-\alpha x^2} + \alpha^2 x^2 e^{-\alpha x^2}\right) \tag{13}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}}(-\hbar^2)\left(-\alpha\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} + \frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right) = \frac{1}{2}\alpha\hbar^2. \tag{14}$$

Quindi abbiamo trovato che lo stato è di minima indeterminazione poichè

$$\langle\Delta^2 x\rangle\langle\Delta^2 p\rangle = \frac{\hbar^2}{4}. \tag{15}$$

Il risultato era atteso perchè se $x_0 = k_0 = 0$ lo stato dato è un pacchetto gaussiano. Nel caso in cui $x_0 \neq 0$ o $k_0 \neq 0$ o tutt'e due lo stato non è più un pacchetto gaussiano ma una sovrapposizione, e quindi non è più di minima indeterminazione, cioè

$$\langle\Delta^2 x\rangle\langle\Delta^2 p\rangle > \frac{\hbar^2}{4}. \tag{16}$$

(5)

Per calcolare l'evoluzione temporale usiamo la rappresentazione di Heisenberg: determiniamo l'evoluzione degli operatori x e p tramite le equazioni di Heisenberg:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[p, H] = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad p(t) = p(0), \tag{17}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[x, H] = \frac{p(t)}{m} \qquad \Longrightarrow \qquad x(t) = x(0) + \frac{p(0)}{m}t. \tag{18}$$

Quindi $\langle p(t)\rangle$, $\langle p(t)^2\rangle$, $\langle x(t)\rangle$ non cambiano nel tempo. Per $\langle x(t)^2\rangle$ invece si ha

$$\langle x^2(t)\rangle = \langle(x(0) + \frac{p(0)}{m}t)(x(0) + \frac{p(0)}{m}t)\rangle = \langle x^2(0) + \frac{p^2(0)}{m^2}t^2 + \frac{t}{m}(xp + px)\rangle \tag{19}$$

$$= \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{2}\alpha\hbar^2\frac{t^2}{m^2} + \frac{t}{m}\langle xp + px\rangle. \tag{20}$$

L'ultimo termine in un pacchetto gaussiano è zero per costruzione. Possiamo verificarlo esplicitamente:

$$\langle xp + px\rangle = 2\langle xp\rangle - i\hbar = 2 \cdot 4|N|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2/2} x(-i\hbar)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) e^{-\alpha x^2/2} - i\hbar \tag{21}$$

$$= 2 \cdot 4|N|^2(-i\hbar)\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2/2} x(-\alpha x) e^{-\alpha x^2/2} - i\hbar = 2 \cdot 4|N|^2 i\hbar\alpha \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} x^2 - i\hbar \tag{22}$$

$$= 2i\hbar\alpha\frac{1}{2\alpha} - i\hbar = 0. \tag{23}$$

Quindi

$$\langle\Delta^2 p(t)\rangle = \langle\Delta^2 p(0)\rangle \tag{24}$$

$$\langle\Delta^2 x(t)\rangle = \langle\Delta^2 x(0)\rangle + \langle\Delta^2 p(0)\rangle\frac{t^2}{m^2}. \tag{25}$$

(6)

Vedere sezione 5.3.4 del libro di testo.

(7)

Nel limite $\alpha \to \infty$ il limite di una gaussiana infinitamente stretta ma con normalizzazione fissata è una delta di Dirac, e si ha dunque

$$\psi(x) = N\left(\delta(x - x_0) + \delta(x + x_0)\right). \tag{26}$$

Quindi una misura di posizione darà come possibili valori x_0 o $-x_0$ con uguale probabilità. Per quanto riguarda l'impulso invece tutti i valori di k sono possibili, in quanto la funzione d'onda nello spazio degli impulsi è la sovrapposiziojne di due onde piane. La normalizzazione N nel limite si determina facilmente osservando che poichè le due gaussiane hanno la medesima larghezza per ogni α, i due stati sono equiprobabili e dunque $N = 1/\sqrt{2}$.

(8)

Se a $t = 0$ viene eseguita una misura di impulso il sistema dopo la misura si trova in un autostato dell'impulso, cioè

$$\psi(x) = \frac{e^{-ik_{obs}x}}{\sqrt{2\pi}}. \tag{27}$$

dove k_{obs} è il valore osservato. Poiché l'operatore impulso commuta con la hamiltoniana l'impulso si conserva e dunque il sistema resta nello stesso stato ad ogni tenpo t: pertanto ogni successiva misura dell'impulso darà come risultato k_{obs}, e dunque

$$\langle p(t)\rangle = \hbar k_{obs} \tag{28}$$

per ogni tempo t. Una misura di posizione nello stato Eq. (27) potrà dare qualunque valore di x in quanto in un autostato di p la posizione è completamente indeterminata.

(9)

Se a $t = 0$ viene eseguita una misura di posizione, il sistema dopo la misura di trova in una delle due autofunzioni di x di cui era sovrapposizione prima della misura. Supponendo che il risultato della misura sia $x = x_0$ si ottiene

$$\psi(x) = \delta(x - x_0). \tag{29}$$

La funzione d'onda nella base degli impulsi è la trasformata di Fourier

$$\psi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\delta(x - x_0)e^{-ikx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ikx_0}. \tag{30}$$

Per evolvere questa funzione d'onda a tempi successivi, basta applicare l'operatore di evoluzione temporale:

$$\psi(k,t) = \langle k|e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\psi\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\hbar^2k^2}{2m}t}\langle k|\psi\rangle = e^{-i\frac{\hbar k^2 t}{2m}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ikx_0}. \tag{31}$$

dove nel primo passaggio si è sfruttato il fatto che $\langle k|$ è un autostato (sinistro) della hamiltoniana hermitiana H: $\langle k|H = \frac{p^2}{2m}\langle k|$ con $p = \hbar k$.

(10)

Per ottenere la funzione d'onda iniziale nello spazio degli impulsi, basta calcolare la trasformata di Fourier, cioè

$$\psi(k) = N\big[F[e^{ik_0x}e^{-\frac{\alpha}{2}(x+x_0)^2}] + F[e^{-ik_0x}e^{-\frac{\alpha}{2}(x-x_0)^2}]\big], \tag{32}$$

dove con $F[f(x)](k)$ si intende

$$F[f(x)](k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dxe^{-ikx}f(x). \tag{33}$$

Calcolando le due trasformate, si ottiene

$$F[e^{ik_0x}e^{-\frac{\alpha}{2}(x+x_0)^2}] = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}e^{-\frac{1}{2\alpha}[(k-k_0)(k-k_0-2ix_0\alpha)]}, \tag{34}$$

$$F[e^{-ik_0x}e^{-\frac{\alpha}{2}(x-x_0)^2}] = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}e^{-\frac{1}{2\alpha}[(k+k_0)(k+k_0+2ix_0\alpha)]}. \tag{35}$$

Questi due risultati si possono ottenere utilizzando la formula

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2+\beta x}dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}\ : \tag{36}$$

la trasformata di Fourier di una gaussiana è una gaussiana di larghezza reciproca. La funzione d'onda al tempo $t = 0$ è quindi

$$\psi(k,t=0) = \frac{N}{\sqrt{\alpha}}\left(e^{-\frac{1}{2\alpha}[(k-k_0)(k-k_0-2ix_0\alpha)]} + e^{-\frac{1}{2\alpha}[(k+k_0)(k+k_0+2ix_0\alpha)]}\right). \tag{37}$$

Per ottenere l'espressione evoluta nel tempo, basta osservare che i due stati di cui la funzione d'onda è sovrapposizione sono entrambi autostati della hamiltoniana asociati allo stesso autovalore di energia. Lo stesso argomento del punto precedente implica quindi che

$$\psi(k,t) = e^{-i\frac{\hbar k^2}{2m}t}\psi(k,0). \tag{38}$$

(11)

Dobbiamo fare la trasformata inversa di Fourier di $\psi(k,t)$ calcolata al punto precedente

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx}\psi(k,t) = \frac{N}{\sqrt{1+(i\hbar\alpha t)/(m)}} e^{-\frac{k_0^2\hbar t + 2k_0(mx + i\alpha\hbar t x_0) - 2i\alpha m(x^2+x_0^2)}{-2im+2\alpha\hbar t}} \left(e^{\frac{m(4ik_0 x + \alpha(x-x_0)^2)}{2m+2i\alpha\hbar t}} + e^{\frac{\alpha m(x+x_0)^2}{2m+2i\alpha\hbar t}}\right), \tag{39}$$

dove si è usato l'integrale di una gaussiana in Eq. (37). Per calcolare l'ampiezza di trovare la particella nell'origine basta prendere $x=0$, ottenendo

$$\psi(x=0,t) = \frac{2N}{\sqrt{1+(i\alpha\hbar t)/(m)}} \exp\left(\frac{\alpha m x_0^2}{2m+2i\alpha\hbar t} - \frac{k_0^2\hbar t + 2i\alpha k_0\hbar t x_0 - 2i\alpha m x_0^2}{-2im+2\alpha\hbar t}\right) \tag{40}$$

Osserviamo che se si prende $t=0$ nell'ultima equazione si trova la funzione d'onda di partenza valutata in $x=0$.