Soluzione dell'esame di FISICA QUANTISTICA del febbraio 2023

(1)

Osserviamo che l'hamiltoniana è proporzionale all'operatore numero $N = a^\dagger a$ il cui spettro è noto dallo sudio del problema dell'oscillatore armonico:

$$N|n\rangle = n|n\rangle \tag{1}$$

dove n è un intero non negativo. Quindi i possibili risultati di una misura dell'energia sono

$$E_n = \lambda n. \tag{2}$$

(2)

Dopo aver misurato l'energia E_n il sistema si trova nel corrispondente autostato $|n\rangle$. Poiché si tratta di un autostato della hamiltoniana e questa non dipende dal tempo l'energia si conserva, lo stato rimane invariato a meno di una fase inosservabile e qualunque successiva misura di energia darà sempre lo stesso risultato E_n.

(3)

$$\begin{aligned}
\langle\psi|x|\psi\rangle &= \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\langle 0| - i\sqrt{\frac{2}{3}}\langle 1|\right)\frac{1}{2}\left(a + a^\dagger\right)\left(\sqrt{\frac{1}{3}}|0\rangle + i\sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\langle 0| - i\sqrt{\frac{2}{3}}\langle 1|\right)\left(i\sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|1\rangle + i\sqrt{\frac{2}{3}}|2\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(i\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{1}{3}} - i\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = 0.
\end{aligned}$$

(4)

Dobbiamo calcolare

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[a, H] = \frac{\lambda}{i\hbar}[a, a^\dagger a] = \frac{\lambda}{i\hbar}\left([a, a^\dagger]a + a^\dagger[a, a]\right) = -\frac{i\lambda}{\hbar}a, \tag{3}$$

la cui soluzione è

$$a(t) = e^{-i\frac{\lambda}{\hbar}t}a(0). \tag{4}$$

Ne segue che

$$a^\dagger(t) = e^{i\frac{\lambda}{\hbar}t}a^\dagger(0). \tag{5}$$

(5)

Gli operatori $\bar{a}$, $\bar{a}^\dagger$ soddisfano la relazione di commutazione

$$[\bar{a}, \bar{a}^\dagger] = [a + \delta, a^\dagger + \delta] = [a, a^\dagger], \tag{6}$$

che coincide con quella degli operator q $q^\dagger$. Ne segue che l'operatore $\bar{N} = \bar{a}^\dagger\bar{a}$ è anch'esso un operatore numero, avente spettro

$$\bar{N}|\bar{n}\rangle = \bar{n}|\bar{n}\rangle, \tag{7}$$

dove $|\bar{n}\rangle$ sono gli autostati dell'hamiltoniana $\bar{H}$, diversi da quelli di H, ma $\bar{n}$ sono sempre interi non negativi. Lo spettro di $\bar{H}$ è quindi uguale a quello di H, cioè

$$\langle\bar{n}|\bar{H}|\bar{n}\rangle = E_{\bar{n}} = E_n = \lambda n. \tag{8}$$

(6)

Capitolo 8.3 del libro di testo.

(7)

Poichè abbiamo calcolato la dipendenza temporale di a e $a^\dagger$, possiamo ottenere la dipendenza temporale di x, ovvero

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-i\frac{\lambda}{\hbar}t}a + e^{i\frac{\lambda}{\hbar}t}a^\dagger\right) \tag{9}$$

Quindi dobbiamo calcolare

$$\langle\psi|x(t)|\psi\rangle = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\langle 0| - i\sqrt{\frac{2}{3}}\langle 1|\right)\frac{1}{2}\left(e^{-i\frac{\lambda}{\hbar}t}a + e^{i\frac{\lambda}{\hbar}t}a^\dagger\right)\left(\sqrt{\frac{1}{3}}|0\rangle + i\sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle\right) \tag{10}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\langle 0| - i\sqrt{\frac{2}{3}}\langle 1|\right)\left(e^{-i\frac{\lambda}{\hbar}t}i\sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle + e^{i\frac{\lambda}{\hbar}t}\sqrt{\frac{1}{3}}|1\rangle + e^{i\frac{\lambda}{\hbar}t}i\sqrt{\frac{2}{3}}|2\rangle\right) \tag{11}$$

$$= \frac{1}{2}\left(i\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{1}{3}}e^{-i\frac{\lambda}{\hbar}t} - i\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{1}{3}}e^{i\frac{\lambda}{\hbar}t}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}\sin\left(\frac{\lambda t}{\hbar}\right). \tag{12}$$

(8)

Lo stato fondamentale di $\bar{H}$ è $|\bar{0}\rangle$ tale che

$$\bar{a}|\bar{0}\rangle = 0,$$
$$\bar{a}^\dagger|\bar{0}\rangle = |\bar{1}\rangle$$

e x è

$$x = \frac{a + a^\dagger}{2} = \frac{(\bar{a} - \delta) + (\bar{a}^\dagger - \delta)}{2} = \frac{\bar{a} + \bar{a}^\dagger}{2} - \delta = \bar{x} - \delta. \tag{13}$$

Il valor medio di x è quindi

$$\langle\bar{0}|x|\bar{0}\rangle = \langle\bar{0}|\bar{x}|\bar{0}\rangle - \langle\bar{0}|\delta|\bar{0}\rangle = -\delta. \tag{14}$$

(9)

L'evoluzione temporale con H di $\bar{a}$ è data da

$$\frac{d}{dt}\bar{a}(t) = \frac{1}{i\hbar}[\bar{a}, H] = \frac{1}{i\hbar}[a + \delta, \lambda a^\dagger a] = \frac{1}{i\hbar}[a, \lambda a^\dagger a] = -\frac{\lambda i}{\hbar}a = -\frac{\lambda i}{\hbar}(\bar{a} - \delta). \tag{15}$$

Equivalentemente si può osservare che

$$\frac{d}{dt}\bar{a}(t) = \frac{d}{dt}(a(t) + \delta) = \frac{d}{dt}a(t) = -\frac{i\lambda}{\hbar}a = -\frac{i\lambda}{\hbar}(\bar{a} - \delta), \tag{16}$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo usato la Eq. (3). Ne segue che

$$\frac{d}{dt}\bar{a}^\dagger(t) = \frac{\lambda i}{\hbar}(\bar{a}^\dagger - \delta). \tag{17}$$

La soluzione è

$$\bar{a}(t) = e^{\frac{-i\lambda t}{\hbar}}(\bar{a}(0) - \delta) + \delta, \tag{18}$$

$$\bar{a}^\dagger(t) = e^{\frac{i\lambda t}{\hbar}}(\bar{a}^\dagger(0) - \delta) + \delta. \tag{19}$$

Di conseguenza possiamo ricavare l'evoluzione temporale di $\bar{x}$ e di x:

$$\bar{x}(t) = \frac{e^{-i\frac{\lambda}{\hbar}t}\bar{a}(0) + e^{i\frac{\lambda}{\hbar}t}\bar{a}^\dagger(0)}{2} + \delta - \delta\cos\left(\frac{\lambda t}{\hbar}\right), \tag{20}$$

$$x(t) = \bar{x}(t) - \delta = \frac{e^{-i\frac{\lambda}{\hbar}t}\bar{a}(0) + e^{i\frac{\lambda}{\hbar}t}\bar{a}^\dagger(0)}{2} - \delta\cos\left(\frac{\lambda t}{\hbar}\right). \tag{21}$$

Il valor medio ad un tempo generico t è quindi

$$\langle\bar{0}|x(t)|\bar{0}\rangle = \langle\bar{0}|\frac{e^{-i\frac{\lambda}{\hbar}t}\bar{a}(0) + e^{i\frac{\lambda}{\hbar}t}\bar{a}^\dagger(0)}{2}|\bar{0}\rangle - \langle\bar{0}|\delta\cos\left(\frac{\lambda t}{\hbar}\right)|\bar{0}\rangle = -\delta\cos\left(\frac{\lambda t}{\hbar}\right) = \angle x\rangle_0\cos\left(\frac{\lambda t}{\hbar}\right), \tag{22}$$

dove $\angle x\rangle_0$ è il valor medio al tempo $t = 0$ dato dalla Eq. (14).

(10)

Dobbiamo trovare l'operatore unitario T tale che

$$T\bar{H}T^\dagger = H, \tag{23}$$

cioè

$$\lambda a^\dagger a = \lambda T\bar{a}^\dagger T^\dagger T\bar{a}T^\dagger = \lambda T(a^\dagger + \delta)T^\dagger T(a + \delta)T^\dagger. \tag{24}$$

Otteniamo

$$Ta^\dagger T^\dagger = a^\dagger - \delta, \tag{25}$$

$$TaT^\dagger = a - \delta, \tag{26}$$

$$\tag{27}$$

cioè

$$TxT^\dagger = T(\frac{a+a^\dagger}{2})T^\dagger = x - \delta. \tag{28}$$

L'operatore T è quindi l'operatore di traslazione di x.
(11)

Al punto precedente abbiamo trovato che l'operatore T è l'operatore traslazione dell'operatore x, il quale agisce sugli autostati di x come

$$T|x\rangle = |x - \delta\rangle. \tag{29}$$

Il generatore G_T è definito da

$$T = e^{i\delta G_T}, \tag{30}$$

e dobbiamo dunque calcolare $\langle x'|G_T|x\rangle$.

Notiamo che per una trasformazione infinitesima

$$\langle x'|T|x\rangle = \langle x'|1 + i\epsilon G_T|x\rangle + O(\epsilon^2) = \delta(x' - x) + i\epsilon\langle x'|G_T|x\rangle + O(\epsilon^2). \tag{31}$$

Però il membro di sinistra è

$$\langle x'|T|x\rangle = \langle x'|x - \epsilon\rangle = \delta(x' - x + \epsilon) \simeq \delta(x' - x) + \epsilon\frac{d}{dx'}\delta(x' - x). \tag{32}$$

Abbiamo trovato quindi che

$$\langle x'|G_T|x\rangle = -i\frac{d}{dx'}\delta(x' - x). \tag{33}$$