Soluzione dell'esame di FISICA QUANTISTICA del 20 febbraio 2023

(1)

Il più generale vettore di stato $|\psi\rangle$ che può essere ottenuto come combinazione degli stati dati può essere scritto

$$|\psi\rangle = A'|1\rangle + B'|2\rangle + C'|3\rangle \tag{1}$$
$$= Ne^{i\alpha}(|1\rangle + Ae^{i\theta}|2\rangle + Be^{i\delta}|3\rangle), \tag{2}$$

dove A', B', C' sono tre costanti complesse mentre N, A, B e le tre fasi α, θ, δ sono tutte reali. Il vettore di stato dipende dunque da sei parametri reali. Di questi però la fase complessiva α è inosservabile, mentre la costante di normalizzazione N è fissata arbitrariamente; ponendo $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ si ha

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}}. \tag{3}$$

I parametri osservabili sono dunque quattro, le due normalizzazioni relative A e B e le due fasi relative θ e δ.

(2)

Se la probabilita di osservare $|3\rangle$ è uguale a $\frac{1}{2}$, vuol dire che

$$\frac{1}{2} = |\langle 3|\psi\rangle|^2 = |C'|^2 = \frac{B^2}{1 + A^2 + B^2} \tag{4}$$

cioè

$$B^2 = 1 + A^2 \tag{5}$$

La forma più generale di $|\psi_0\rangle$ è quindi

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{1 + A^2}\left(|1\rangle + Ae^{i\theta}|2\rangle\right)\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\delta}|3\rangle. \tag{6}$$

(3)

Se il risultato della misura è $|3\rangle$, lo stato dopo la misura è

$$|\psi_1\rangle = |3\rangle. \tag{7}$$

Se invece il risultato della misura è che lo stato $|\psi\rangle$ non si trova nello stato $|3\rangle$, lo stato dopo la misura è

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + A^2}}(|1\rangle + Ae^{i\theta}|2\rangle). \tag{8}$$

(4)

Lo stato $|\psi_0\rangle$ è dato dalla Eq. (6). I possibili risultati, con le relative probabilità, di una misura di O_1 sono

$$\mu_1 = 1, \quad p_1 = \frac{1}{2(1 + A^2)}, \tag{9}$$
$$\mu_2 = 0, \quad p_2 = \frac{A^2}{2(1 + A^2)}, \tag{10}$$
$$\mu_3 = -1, \quad p_3 = \frac{1}{2}. \tag{11}$$

Notare che $p_1 + p_2 = \frac{1}{2}$, pertanto $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ come deve essere

(5)

Se lo stato si trova in $|\psi_1\rangle = |3\rangle$, l'unico risultato possibile di una misura di O_1 è $\mu_3 = -1$ (con probabilità 1).

Se lo stato si trova in

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + A^2}}\left(|1\rangle + Ae^{i\theta}|2\rangle\right), \tag{12}$$

una misura di O_1 può avere come risultato $\mu_1 = 1$ con probabilità $1/(1 + A^2)$ oppure $\mu_2 = 0$ con probabilità $A^2/(1 + A^2)$.

(6)

Paragrafo 3.2.2 del libro di testo.

(7)

L'operatore O_x può essere scritto in forma matriciale nella base degli stati $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$ come

$$O_x = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Quindi, la condizione che $O_x = O_x^\dagger$ implica che $\lambda_i^* = \lambda_i$, cioè che i coefficienti λ_i siano reali. Le successive due condizioni sono

$$\lambda_1 = 1, \tag{14}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0. \tag{15}$$

La condizione che O_x implementi la misura del punto (2) implica che $\lambda_1 = \lambda_2$. Infatti, in questo modo, sia che lo stato sia misurato in $|1\rangle$ sia che sia misurato in $|2\rangle$, il risultato della misura è lo stesso e, quindi, l'unica informazione che si può ricavare è che lo stato non si trova in $|3\rangle$.

Unendo tutte le condizioni, si ottiene

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \tag{16}$$

$$\lambda_3 = -2, \tag{17}$$

(8)

La forma matriciale di O_y è

$$O_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

mentre la forma matriciale generale di un operatore che implementa la misura del punto (2) è

$$O_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Dobbiamo quindi calcolare $[O_y, O_2] = O_y O_2 - O_2 O_y$.

$$O_y O_2 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{20}$$

$$O_2 O_y = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Si ottiene quindi che i due operatori sono compatibili. Equivalentemente, si può osservare che la misura del punto (2) permette solo di determinare se il sistema si trova o meno nello stato $|3\rangle$, mentre l'operatore O_y ha componenti nonnulle solo nel sottospazio ricoperto dagli stati $|1\rangle$ e $|2\rangle$ e dunque ammette lo stato $|3\rangle$ come autostato con autovalore nullo ed è pertanto compatibile con questa misura.

(9)

L'equazione secolare per O_y è

$$0 = -\lambda(\lambda^2 - 1). \tag{22}$$

Gli autovalori di O_y sono quindi $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 0$. Gli autostati corrispondenti sono

$$|1_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle), \tag{23}$$

$$|2_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle), \tag{24}$$

$$|3_y\rangle = |3\rangle. \tag{25}$$

Si può facilmente osservare che questi ultimi sono anche autostati di O_x.

(10)

Scriviamo lo stato $|1\rangle$ in funzione degli autostati di O_y trovati al punto precedente:

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1_y\rangle + |2_y\rangle). \tag{26}$$

L'evoluzione temporale, data da $H = EO_y$ è quindi

$$|1\rangle(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-\frac{i}{\hbar}Et}|1_y\rangle + e^{\frac{i}{\hbar}Et}|2_y\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1_y\rangle + e^{\frac{i}{\hbar}2Et}|2_y\rangle), \tag{27}$$

dove si è moltiplicato per un fattore di fase globale irrilevante.

Dobbiamo quindi calcolare

$$|\langle 1(0)|1(t)\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 1_y| + \langle 2_y|)|\frac{1}{\sqrt{2}}(|1_y\rangle + e^{\frac{i}{\hbar}2Et}|2_y\rangle)\right|^2 = \frac{1}{4}|1 + e^{\frac{i}{\hbar}2Et}|^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos(\frac{2Et}{\hbar})) = \cos^2(\frac{Et}{\hbar}). \tag{28}$$

Equivalentemente, si può osservare che, nel sottospazio ricoperto dagli stati $|1\rangle$ e $|2\rangle$, la hamiltoniana è pari a $H = E\sigma_1$, dove σ_1 è una matrice di Pauli. L'operatore di evoluzione temporale è dunque

$$S = \exp \frac{1}{i\hbar}\sigma_1 Et = \cos\left(\frac{Et}{\hbar}\right) - i\sigma_1 \sin\left(\frac{Et}{\hbar}\right). \tag{29}$$

Pertanto

$$|\langle 1(0)|1(t)\rangle|^2 = |\langle 1|S(t)|1\rangle|^2 = \cos^2\left(\frac{Et}{\hbar}\right). \tag{30}$$

(11)

La probabilità richiesta è data da

$$P = \mathrm{Tr}\left(|1\rangle\langle 1|S(t)\rho S^\dagger(t)\right) = \mathrm{Tr}\left(|1\rangle\langle 1|\rho(t)\right), \tag{31}$$

dove a matrice densità al tempo t è data da

$$\rho(t) = e^{-\frac{it}{\hbar}H}\rho(0)e^{\frac{it}{\hbar}H} \tag{32}$$

con

$$\rho(0) = \frac{1}{2}\left(|1\rangle\langle 1| + |3\rangle\langle 3|\right). \tag{33}$$

Visto che lo stato $|3\rangle$ è autostato di H con autovalore nullo, ne segue immediatamente che

$$\rho(t) = \frac{1}{2}\left(|1(t)\rangle\langle 1(t)| + |3(0)\rangle\langle 3(0)|\right), \tag{34}$$

dove $|1(t)\rangle$ è dato dalla Eq. (27).

Si ha dunque

$$P = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(|1(0)\rangle\langle 1(0)|\rho(t)\right) = \frac{1}{2}|\langle 1(0)|1(t)\rangle|^2 = \frac{1}{2}\cos^2\left(\frac{Et}{\hbar}\right). \tag{35}$$

Equivalentemente, si può osservare che la matrice densità data corrisponde a un sistema che al tempo $t = 0$ si trova con probabilità $\frac{1}{2}$ nello stato $|1\rangle$ e con probabilità $\frac{1}{2}$ nello stato $|3\rangle$. Ma se il sistema si trova al tempo $t = 0$ nello stato $|3\rangle$ esso vi resterà a qualunue tempo successivo perché lo stato $|3\rangle$ è autostato della hamiltoniana, e dunque non potrà mai essere rivelato nello stato $|1\rangle$. Se invece al tempo $t = 0$ si trova nello stato $|1\rangle$, la probabilità è quella calcolata al punto precedente, Eq. (28). Dunque la probabilità richiesta è la metà di quella calcolata al punto precedente, Eq. (28).