Soluzione dell'esame di FISICA QUANTISTICA del 20 giugno 2022

(1)

Poichè per una buca infinita di potenziale l'energia è data da

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{8L^2 m} n^2, \tag{1}$$

E ed E' sono rispettivamente il primo e il secondo stato eccitato. Quindi la forma più generale della funzione d'onda $\phi(x)$ è data da

$$\phi(x) = N e^{i\varphi} \Big(\sqrt{\frac{2}{3}} \psi_1(x) + e^{i\theta} \sqrt{\frac{1}{3}} \psi_2(x) \Big), \tag{2}$$

dove

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{1}{L}} \cos\Big(\frac{\pi x}{2L}\Big), \tag{3}$$

$$\psi_2(x) = \sqrt{\frac{1}{L}} \sin\Big(\frac{\pi x}{L}\Big) \tag{4}$$

e N, φ e θ sono parametri reali. N e φ sono rispettivamente una costante moltiplicativa e un fattore di fase globale: la costante moltiplicativa è fissata convenzionalmente per normalizzazione, mentre la fase globale è inosservabile, quindi nessuna delle due è fisicamente misurabile.

(2)

Lo stato $\phi(x)$ è uguale a $\psi(x)$ a patto che $\theta = \pi/2$. Il valor medio di H è dato da

$$\langle\psi|H|\psi\rangle = \Big(\sqrt{\frac{2}{3}}\langle 1| - i\sqrt{\frac{1}{3}}\langle 2|\Big) H \Big(\sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle + i\sqrt{\frac{1}{3}}|2\rangle\Big) = \Big(\sqrt{\frac{2}{3}}\langle 1| - i\sqrt{\frac{1}{3}}\langle 2|\Big)\Big(\sqrt{\frac{2}{3}}E_1|1\rangle + i\sqrt{\frac{1}{3}}E_2|2\rangle\Big) = \frac{2}{3}E_1 + \frac{1}{3}E_2 = \frac{\pi^2\hbar^2}{4mL^2}. \tag{5}$$

(3)

$$\langle\psi|x|\psi\rangle = \Big(\sqrt{\frac{2}{3}}\langle 1| - i\sqrt{\frac{1}{3}}\langle 2|\Big) x \Big(\sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle + i\sqrt{\frac{1}{3}}|2\rangle\Big) = \frac{2}{3}\langle 1|x|1\rangle + i\frac{\sqrt{2}}{3}\langle 1|x|2\rangle - i\frac{\sqrt{2}}{3}\langle 2|x|1\rangle + \frac{1}{3}\langle 2|x|2\rangle. \tag{6}$$

Per parità abbiamo che $\langle 1|x|1\rangle = \langle 2|x|2\rangle = 0$, mentre, poichè le autofunzioni $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ sono entrambi reali, abbiamo che $\langle 1|x|2\rangle = \langle 2|x|1\rangle$. Segue che

$$\langle\psi|x|\psi\rangle = 0. \tag{7}$$

(4)

$$\langle\psi|p|\psi\rangle = \Big(\sqrt{\frac{2}{3}}\langle 1| - i\sqrt{\frac{1}{3}}\langle 2|\Big) p \Big(\sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle + i\sqrt{\frac{1}{3}}|2\rangle\Big) = \frac{2}{3}\langle 1|p|1\rangle + i\frac{\sqrt{2}}{3}\langle 1|p|2\rangle - i\frac{\sqrt{2}}{3}\langle 2|p|1\rangle + \frac{1}{3}\langle 2|p|2\rangle. \tag{8}$$

Per parità abbiamo che $\langle 1|p|1\rangle = \langle 2|p|2\rangle = 0$. Gli altri due termini si calcolano tramite

$$\langle 1|p|2\rangle = \int_{-L}^{L} dx\, \psi_1(x)\Big(-i\hbar\frac{d}{dx}\Big)\psi_2(x) = -i\hbar\frac{1}{L}\frac{\pi}{L}\int_{-L}^{L}\cos\Big(\frac{\pi x}{2L}\Big)\cos\Big(\frac{\pi x}{L}\Big) = -i\hbar\frac{\pi}{L^2}\frac{8L}{6\pi} = -i\frac{4\hbar}{3L}, \tag{9}$$

$$\langle 2|p|1\rangle = \int_{-L}^{L} dx\, \psi_2(x)\Big(-i\hbar\frac{d}{dx}\Big)\psi_1(x) = -i\hbar\frac{1}{L}\frac{\pi}{2L}\int_{-L}^{L}\sin\Big(\frac{\pi x}{L}\Big)(-1)\sin\Big(\frac{\pi x}{2L}\Big) = i\hbar\frac{\pi}{2L^2}\frac{8L}{3\pi} = i\frac{4\hbar}{3L}. \tag{10}$$

Quindi otteniamo che

$$\langle\psi|p|\psi\rangle = i\frac{\sqrt{2}}{3}(-i)\frac{4\hbar}{3L} - i\frac{\sqrt{2}}{3}i\frac{4\hbar}{3L} = 8\frac{\sqrt{2}\hbar}{9L}. \tag{11}$$

(5)

Dopo una misura di energia dello stato $|\psi\rangle$, per il collasso della funzione d'onda, esso può cadere nello stato $|1\rangle$ o nello stato $|2\rangle$, con le probabilità date al punto (1). In entrambi i casi, poiché lo stato si troverà in un autostato dell'hamiltoniana, esso non evolverà (l'evoluzione è data da un fattore di fase globale che è irrilevante). Per questo i valori medi richiesti sono dati da

$$\langle 1|x|1\rangle = \langle 2|x|2\rangle = \langle 1|p|1\rangle = \langle 2|p|2\rangle = 0 \quad \text{ad ogni } t, \tag{12}$$

dove abbiamo usato che i valori medi si annullano per parità.

(6)

Vedere paragrafo 7.1.1 del libro di testo

(7)

L'evoluzione temporale dello stato $|\psi\rangle$ è data da

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}|1\rangle + i\sqrt{\frac{1}{3}}e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}|2\rangle \qquad (13) \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle + i\sqrt{\frac{1}{3}}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_2-E_1)t}|2\rangle, \end{aligned}$$

dove si è usato che un fattore di fase globale è irrilevante. Quindi

$$\begin{aligned} \langle\psi(t)|p|\psi(t)\rangle &= \qquad (14) \\ &= \Big(\sqrt{\frac{2}{3}}\langle 1| - i\sqrt{\frac{1}{3}}e^{\frac{i}{\hbar}(E_2-E_1)t}\langle 2|\Big)p\Big(\sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle + i\sqrt{\frac{1}{3}}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_2-E_1)t}|2\rangle\Big) \\ &= i\frac{\sqrt{2}}{3}e^{-\frac{i}{\hbar}(E_2-E_1)t}\langle 1|p|2\rangle - i\frac{\sqrt{2}}{3}e^{\frac{i}{\hbar}(E_2-E_1)t}\langle 2|p|1\rangle. \qquad (15) \end{aligned}$$

Considerando che $\langle 1|p|2\rangle = -i4\hbar/3L$ e $\langle 2|p|1\rangle = i4\hbar/3L$, si ottiene

$$\begin{aligned} \langle\psi(t)|p|\psi(t)\rangle &= 2i\frac{\sqrt{2}}{3}\Big(\frac{-i4\hbar}{3L}\Big)\Big(\frac{e^{\frac{i}{\hbar}(E_2-E_1)t} + e^{-\frac{i}{\hbar}(E_2-E_1)t}}{2}\Big) \qquad (16) \\ &= \frac{8\sqrt{2}\hbar}{9L}\cos\big(\frac{E_2-E_1}{\hbar}t\big), \end{aligned}$$

con

$$E_2 - E_1 = \frac{3\hbar^2\pi^2}{8L^2 m}. \tag{17}$$

(8)

Per calcolare le equazioni del moto alla Heisenberg per $(x, p, p^2/2m, V(x))$, abbiamo bisogno di calcolare i rispettivi commutatori con l'hamiltoniana $H = p^2/2m + V(x)$ con $V(x) = V_0\Big(\theta(x-L) + \theta(-x-L)\Big)$. Calcolati i commutatori, le equazioni del moto avranno tutte la forma:

$$\frac{d}{dt}O(t) = \frac{1}{i\hbar}\Big[O(t), H\Big]. \tag{18}$$

I commutatori si ottengono:

$$\Big[x, H\Big] = \Big[x, \frac{p^2}{2m}\Big] = \frac{1}{2m}\Big(p\Big[x,p\Big] + \Big[x,p\Big]p\Big) = i\hbar\frac{p}{m} \tag{19}$$

$$\Big[p, H\Big] = \Big[p, V(x)\Big] = V_0\Big(\Big[p, \theta(x-L)\Big] + \Big[p, \theta(-x-L)\Big]\Big) = -V_0 i\hbar\Big(\delta(x-L) - \delta(-x-L)\Big) \tag{20}$$

$$\Big[\frac{p^2}{2m}, H\Big] = \frac{1}{2m}\Big(p\Big[p, V(x)\Big] + \Big[p, V(x)\Big]p\Big) \tag{21}$$

$$\Big[V(x), H\Big] = \Big[V(x), \frac{p^2}{2m}\Big] = -\Big[\frac{p^2}{2m}, V(x)\Big] = -\Big[\frac{p^2}{2m}, H\Big], \tag{22}$$

dove si sono usate le seguenti relazioni:

$$\Big[x, V(x)\Big] = 0 \tag{23}$$

$$\Big[p, p^2\Big] = 0 \tag{24}$$

$$\Big[p, f(x)\Big] = -i\hbar\frac{d}{dx}f(x). \tag{25}$$

Abbiamo quindi

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m} \tag{26}$$
$$\frac{dp}{dt} = -V_0\Big(\delta(x-L) - \delta(-x-L)\Big) \tag{27}$$
$$\frac{d}{dt}\frac{p^2}{2m} = -\frac{dV}{dt} = -\frac{V_0 p}{m}\Big(\delta(x-L) - \delta(-x-L)\Big). \tag{28}$$

(9)

Gli spettri di energia dei due sistemi sono dati da $E_n^{(1)} = \frac{\hbar^2\pi^2}{8L^2m}n^2$ e $E_k^{(2)} = \frac{\hbar^2\pi^2}{8(2L)^2m}k^2$. Pertanto si ottiene che $E_n^{(1)}/E_k^{(2)} = 1$ per

$$4\Big(\frac{n}{k}\Big)^2 = 1, \tag{29}$$

cioè quando $k = 2n$. Quindi tutti gli autovalori di energia della hamiltoniana con potenziale V appartengono anche allo spettro di quella con potenziale V', mentre solo gli autovalori della hamiltoniana con potenziale V' con k pari appartengono anche allo spettro di quella con potenziale V.

Vale la stessa relazione per le autofunzioni ma solo con n pari: infatti essendo le autofunzioni della buca infinita di potenziale date da

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{L}}\cos(n\frac{\pi x}{L}) & \text{se } n \text{ dispari} \\ \sqrt{\frac{1}{L}}\sin(n\frac{\pi x}{L}) & \text{se } n \text{ pari} \end{cases}, \tag{30}$$

se n è dispari la sua autofunzione è un coseno, ma k è pari e quindi è un seno, e quindi le due autofunzioni non sono uguali. Quindi solo le autofunzioni della hamiltoniana con potenziale V aventi n pari sono anche autofunzioni di quella con potenziale V', e solo le autofunzioni della hamiltoniana con potenziale V aventi k multiplo di 4 sono anche autofunzioni di quella con potenziale V'.

(10)

Per dimostrare la proprietà richiesta, studiamo cosa accade sotto integrazione di una funzione di prova.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x-\lambda a)f(x)dx = \int_{\lambda a}^{+\infty} f(x)dx. \tag{31}$$

Lo stesso vale per $\theta(x/\lambda - a)$ infatti:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \theta\Big(\frac{x}{\lambda} - a\Big)f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(y-a)f(\lambda y)\lambda dy \tag{32}$$
$$= \int_{a}^{+\infty} f(\lambda y)\lambda dy = \int_{\lambda a}^{+\infty} f(x')dx', \tag{33}$$

dove nel primo passaggio abbiamo fatto il cambio di variabili $y = x/\lambda$, mentre nel secondo $x' = \lambda y$.

(11)

Sappiamo che

$$V(x) = V_0\Big(\theta(x-L) + \theta(-x-L)\Big) \tag{34}$$
$$V'(x) = V_0\Big(\theta(x-2L) + \theta(-x-2L)\Big). \tag{35}$$

Di conseguenza l'operatore D deve essere l'operatore di dilatazione tale che

$$e^{-i\lambda D}xe^{i\lambda D} = (1+\lambda)x, \tag{36}$$

in cui dobbiamo determinare il valore di λ opportuno che trasformi $V(x)$ in $V'(x)$. Allora abbiamo

$$e^{-i\lambda D}V(x)e^{i\lambda D} = V_0\Big(\theta((1+\lambda)x - L) + \theta(-(1+\lambda)x - L)\Big) \tag{37}$$
$$= V_0\Big(\theta\Big(\frac{x}{\alpha} - L\Big) + \theta\Big(-\frac{x}{\alpha} - L\Big)\Big), \tag{38}$$

dove si è definito $(1+\lambda) = 1/\alpha$. Utilizzando adesso la proprietà della funzione $\theta(x)$ (dimostrata al punto precedente) si ottiene

$$e^{-i\lambda D}V(x)e^{i\lambda D} = V_0\Big(\theta(x-\alpha L) + \theta(-x-\alpha L)\Big), \tag{39}$$

da cui si ottiene che, per ottenere $V'(x)$, deve valere $\alpha = 2$ cioè $\lambda = -1/2$. A questo punto vogliamo applicare la trasformazione anche alla parte cinetica dell'Hamiltoniana, cioè a

$$p^2/2m = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}. \tag{40}$$

Trasformando x in $x' = (1+\lambda)x$, si ottiene $dx' = (1+\lambda)dx$ e quindi

$$\frac{p^2}{2m} \to -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{(1+\lambda)^2 dx^2} = \alpha^2\frac{p^2}{2m} = 4\frac{p^2}{2m}. \tag{41}$$

Di conseguenza l'Hamiltoniana finale si puo' scrivere

$$H' = 4\frac{p^2}{2m} + V'(x). \tag{42}$$