Soluzione dell'esame di FISICA QUANTISTICA del 22 luglio 2022

(1)

Lo stato è $|\psi\rangle = N[(1+i)|0\rangle + 2|1\rangle - i|2\rangle]$ per cui dobbiamo imporre

$$1 = \langle\psi|\psi\rangle = N^2[2+4+1] = 7N^2. \tag{1}$$

Di conseguenza otteniamo $N = e^{i\phi}/\sqrt{7}$, dove ϕ è una fase arbitraria che può essere scelta uguale a zero.

(2)

I possibili risultati di una misura di energia, con le rispettive probabilità, sono:

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega, \quad p = \frac{2}{7} \tag{2}$$

$$E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega, \quad p = \frac{4}{7} \tag{3}$$

$$E_2 = \frac{5}{2}\hbar\omega, \quad p = \frac{1}{7}. \tag{4}$$

(3)

Se viene misurato il valore E', lo stato dopo la misura collassa nello stato $|1\rangle$. Ricordando che

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger) \tag{5}$$

$$p = \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}i(a^\dagger - a), \tag{6}$$

dove a e $a^\dagger$ sono rispettivamente gli operatori di distruzione e creazione, otteniamo:

$$\langle 1|x|1\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle 1|(|0\rangle + \sqrt{2}|2\rangle) = 0 \tag{7}$$

$$\langle 1|p|1\rangle = \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}i\langle 1|(\sqrt{2}|2\rangle - |0\rangle) = 0 \tag{8}$$

(4)

Se viene misurato un valore diverso da E', lo stato dopo la misura collassa in

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}[(1+i)|0\rangle - i|2\rangle). \tag{9}$$

Di conseguenza otteniamo

$$\langle\psi|x|\psi\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\frac{1}{3}\langle\psi|(-i\sqrt{2}|1\rangle + (1+i)|1\rangle - i\sqrt{3}|3\rangle) = 0, \tag{10}$$

$$\langle\psi|p|\psi\rangle = \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}i\frac{1}{3}\langle\psi|((1+i)|1\rangle - i\sqrt{3}|3\rangle + i\sqrt{2}|1\rangle) = 0. \tag{11}$$

(5)

Se non viene effettuata alcuna misura di energia, lo stato è

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{7}}[(1+i)|0\rangle + 2|1\rangle - i|2\rangle]. \tag{12}$$

Otteniamo quindi

$$\langle\psi|x|\psi\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\frac{1}{7}\langle\psi|(2|0\rangle - i\sqrt{2}|1\rangle + (1+i)|1\rangle + 2\sqrt{2}|2\rangle - i\sqrt{3}|3\rangle) = \tag{13}$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\frac{1}{7}(2(1-i) - 2\sqrt{2}i + 2(1+i) + 2\sqrt{2}i) = \frac{4}{7}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}, \tag{14}$$

$$\langle\psi|p|\psi\rangle = \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}i\frac{1}{7}\langle\psi|((1+i)|1\rangle + 2\sqrt{2}|2\rangle - i\sqrt{3}|3\rangle - 2|0\rangle + i\sqrt{2}|1\rangle) = \tag{15}$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}i\frac{1}{7}(-2(1-i) + 2(1+i) + 2\sqrt{2}i + 2\sqrt{2}i) = -\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\frac{4}{7}(1+\sqrt{2}) \tag{16}$$

Il valor medio di p (non richiesto) viene dato per completezza. (6)

Vedere paragrafi 8.3.1 e 8.3.2 del libro di testo.

(7)

Dobbiamo calcolare

$$\Delta_\psi x = \langle\psi|x^2|\psi\rangle - (\langle\psi|x|\psi\rangle)^2\,, \tag{17}$$

dove il valor medio di x è stato calcolato nel punto (5). Sfruttando l'espressione

$$x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\big(a^2 + a^{\dagger\,2} + 2N + 1\big)\,, \tag{18}$$

abbiamo che

$$\langle\psi|x^2|\psi\rangle = \frac{1}{7}\frac{\hbar}{2m\omega}\big(\langle 0|(1-i) + \langle 1|2 + \langle 2|i\big)\big(a^2 + a^{\dagger\,2} + 2N + 1\big)\big((1+i)|0\rangle + 2|1\rangle - i|2\rangle\big) \tag{19}$$

$$= \frac{1}{7}\frac{\hbar}{2m\omega}\big(\langle 0|(1-i) + \langle 1|2 + \langle 2|i\big)\big(-i\sqrt{2}|0\rangle + (1+i)\sqrt{2}|2\rangle + 4|1\rangle - 4i|2\rangle + (1+i)|0\rangle + 2|1\rangle - i|2\rangle\big) \tag{20}$$

$$= \frac{1}{7}\frac{\hbar}{2m\omega}\big((1-i)(-i)\sqrt{2} + 2 + 8 + 4 + i(1+i)\sqrt{2} + 4 + 1\big) \tag{21}$$

$$= \frac{1}{7}\frac{\hbar}{2m\omega}\big(19 - 2\sqrt{2}\big)\,. \tag{22}$$

Quindi troviamo che

$$\Delta_\psi x = \frac{1}{7}\frac{\hbar}{2m\omega}\big(19 - 2\sqrt{2}\big) - \Big(\frac{4}{7}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\Big)^2 \tag{23}$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega}\Big(\frac{19 - 2\sqrt{2}}{7} - \frac{16}{49}\Big) \tag{24}$$

(8)

L'evoluzione temporale dell'operatore di distruzione è data da

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\big[a, H\big] = \frac{1}{i\hbar}\big[a, \hbar\omega(N + \frac{1}{2})\big] = -i\omega\big[a, N\big] = -i\omega a\,, \tag{25}$$

la cui soluzione è

$$a_H(t) = e^{-i\omega t}a_H(0) = e^{-i\omega t}a_S, \tag{26}$$

quindi abbiamo che

$$\langle\psi|a_H(t)|\psi\rangle = e^{-i\omega t}\frac{1}{7}\big(\langle 0|(1-i) + \langle 1|2 + \langle 2|i\big)a_S\big((1+i)|0\rangle + 2|1\rangle - i|2\rangle\big) \tag{27}$$

$$= e^{-i\omega t}\frac{1}{7}\big(\langle 0|(1-i) + \langle 1|2 + \langle 2|i\big)\big(2|0\rangle - \sqrt{2}i|1\rangle\big) \tag{28}$$

$$= e^{-i\omega t}\frac{1}{7}\big(2(1-i) - \sqrt{2}2i\big). \tag{29}$$

(9)

Dobbiamo calcolare

$$P_0 = |\langle 0|\psi\rangle|^2, \tag{30}$$

dove

$$\langle 0|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\psi_0^*(x)\psi(x), \tag{31}$$

con

$$\psi(x) = \Big(\frac{m2\omega}{\pi\hbar}\Big)^{1/4} \exp\Big[-\frac{x^2 m2\omega}{2\hbar}\Big] \tag{32}$$

$$\psi_0(x) = \Big(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\Big)^{1/4} \exp\Big[-\frac{x^2 m\omega}{2\hbar}\Big]. \tag{33}$$

Otteniamo che

$$\langle 0|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi_0^*(x)\psi(x) = \Big(\frac{m2\omega}{\pi\hbar}\Big)^{1/4}\Big(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\Big)^{1/4} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \exp\Big[-\frac{3x^2 m\omega}{2\hbar}\Big]. \tag{34}$$

$$\tag{35}$$

Sfruttando l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \exp\big(-\alpha x^2\big) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad \text{con} \quad \alpha = \frac{3m\omega}{2\hbar}, \tag{36}$$

otteniamo che

$$\langle 0|\psi\rangle = \Big(\frac{m2\omega}{\pi\hbar}\Big)^{1/4}\Big(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\Big)^{1/4}\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{3m\omega}} = 2^{1/4}\sqrt{\frac{2}{3}}. \tag{37}$$

Quindi

$$P_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \tag{38}$$

(10)

Poiché gli autostati dell'oscillatore armonico ψ_n sono funzioni pari per n pari e dispari per n dispari, essendo ψ una funzione pari, abbiamo che

$$\langle n|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi_n^*(x)\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ dispari} \\ \neq 0 & \text{se } n \text{ pari} \end{cases}. \tag{39}$$

(11) Sfruttando la risoluzione dell'identità

$$|\psi\rangle = \sum_n |n\rangle\langle n|\psi\rangle, \tag{40}$$

ma per quanto detto al punto precedente tutti i termini con n pari si annullano, quindi

$$|\psi\rangle = \sum_{n \text{ pari}} |n\rangle\langle n|\psi\rangle. \tag{41}$$

Per calcolare l'evoluzione temporale applichiamo l'operatore di evoluzione:

$$|\psi\rangle_t = \sum_{n \text{ pari}} e^{-iHt/\hbar}|n\rangle\langle n|\psi\rangle = \sum_{n \text{ pari}} e^{-iE_n t/\hbar}|n\rangle\langle n|\psi\rangle \tag{42}$$

$$= \sum_{n \text{ pari}} e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})t}|n\rangle\langle n|\psi\rangle. \tag{43}$$

Valutando quest'ultima espressione per $t = \pi/\omega$ otteniamo

$$|\psi\rangle_t = \sum_{n \text{ pari}} e^{-i\pi(n+\frac{1}{2})}|n\rangle\langle n|\psi\rangle \tag{44}$$

Essendo n pari abbiamo che $\exp(-i\pi n) = 1$, quindi

$$|\psi\rangle_t = e^{-i\frac{\pi}{2}} \sum_{n \text{ pari}} |n\rangle\langle n|\psi\rangle. \tag{45}$$

ovvero lo stato cambia per un fattore di fase globale.