Soluzione dell'esame di FISICA QUANTISTICA del 19 settembre 2022

(1)

Data la funzione d'onda

$$\langle x|\psi\rangle = N(e^{ik_0x} + e^{-ik_0x})e^{-\lambda^2 x}, \tag{1}$$

il valor medio di una misura di posizione è dato da

$$\begin{aligned}\langle\psi|x|\psi\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \langle\psi|x|x\rangle\langle x|\psi\rangle dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x|\langle x|\psi\rangle|^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x|N|^2 e^{-2\lambda x^2} 4\cos^2(k_0x) dx = 0, \end{aligned}\tag{2}$$

dove si è usato che

$$|e^{ik_0x} + e^{-ik_0x}|^2 = 4\cos^2(k_0x).$$

Il risultato dell'integrale è 0 per motivi di parità: $e^{-2\lambda x^2} 4\cos(k_0x)^2$ è pari, mentre x è dispari. La funzione integranda è quindi dispari ed, integrata in un intervallo simmetrico, dà 0.

(2)

Il valor medio di una misura d'impulso è dato da

$$\langle\psi|p|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle\psi|x\rangle\langle x|p|\psi\rangle dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x)(-i\hbar\frac{d}{dx})\psi(x) = 0. \tag{3}$$

Il risultato è 0 di nuovo per ragioni di parità: $\psi^*(x)$ è pari, mentre la derivata $(\frac{d}{dx})\psi(x)$ è dispari.

(3)

Le equazioni di Heisenberg sono:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H,x] = \frac{i}{\hbar}\frac{1}{2m}[p^2,x] = \frac{p}{m}, \tag{4}$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H,p] = \frac{i}{\hbar}\kappa[x,p] = -\kappa. \tag{5}$$

La soluzione per l'impulso è quindi

$$p(t) = p(0) - \kappa t, \tag{6}$$

che, sostituita nell'equazione della posizione, dà

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p(0)}{m} - \frac{\kappa t}{m},$$

che ha come soluzione

$$x(t) = x(0) + \frac{p(0)}{m}t - \frac{\kappa}{2m}t^2. \tag{7}$$

(4)

Per ottener i valori medi per una misura di posizione ed impulso a tutti i tempi t bisogna usare i risultati dei punti precedenti. Quindi si ottiene

$$\begin{aligned}\langle x(t)\rangle &= \langle x(0)\rangle + \frac{t}{m}\langle p(0)\rangle - \frac{\kappa}{2m}t^2 = -\frac{\kappa}{2m}t^2, \\ \langle p(t)\rangle &= \langle p(0)\rangle - \kappa t = -\kappa t, \end{aligned}\tag{8}$$

dove si sono anche usati i risultati di eq. (2) e eq. (3).

(5)

Se $\lambda = 0$ la funzione d'onda diventa

$$\psi(x) = N(e^{\frac{ik_0x\hbar}{\hbar}} + e^{-\frac{ik_0x\hbar}{\hbar}}).$$

Sapendo che le autofunzioni dell'impulso sono

$$\langle x|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx},$$

possiamo riscrivere lo come

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|k_0\rangle + |-k_0\rangle). \tag{9}$$

Una misura di impulso ha dunque due possibili risultati, $p_1 = k_0\hbar$ e $p_2 = -k_0\hbar$, entrambi con probabilità 1/2. Se il risultato della misura fosse p_1, avrei che p_1 sarebbe il valor medio a $t = 0$ e viceversa se il risultato della misura fosse p_2.

Ad un tempo $t > 0$, usando eq. (6), si ottiene

$$\langle p_{1,2}(t)\rangle = p_{1,2} - \kappa t = \pm k_0\hbar - \kappa t.$$

(6)

Vedere paragrafi 5.3.1 e 5.3.2 del libro di testo.

(7)

La funzione d'onda al tempo $t = 0$ nella base degli impulsi si ottiene come trasformata di Fourier della funzione d'onda nella base delle posizioni:

$$\begin{aligned}\psi(p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{-ipx}{\hbar}}\psi(x)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}N\int_{-\infty}^{+\infty} dx[e^{-\lambda x^2+i(k_0x-\frac{px}{\hbar})} + e^{-\lambda x^2-i(k_0x+\frac{px}{\hbar})}].\end{aligned} \tag{10}$$

Sapendo che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\lambda x^2+\beta x} = \frac{\sqrt{\pi}e^{\frac{\beta^2}{4\lambda}}}{\sqrt{\lambda}} \tag{11}$$

troviamo, usando che $\beta = i(k_0 \mp \frac{p}{\hbar})$,

$$\psi(p) = \frac{N}{\sqrt{2\pi\hbar}}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\left(e^{-\frac{(k_0-p/\hbar)^2}{4\lambda}} + e^{-\frac{(k_0+p/\hbar)^2}{4\lambda}}\right). \tag{12}$$

La funzione $\psi(p)$ è integrabile tra $-\infty$ e ∞ e quindi è normalizzabile in senso proprio: rappresenta infatti un pacchetto d'onde gaussiano. Il valore di N si calcola imponendo che

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp|\psi(p)|^2 = 1, \tag{13}$$

da cui si ricava che

$$N = \frac{\lambda^{1/4}e^{\frac{k_0^2}{4\lambda}}}{(2\pi)^{1/4}\sqrt{1+e^{\frac{k_0^2}{2\lambda}}}}. \tag{14}$$

(8)

Dobbiamo calcolare $\langle\psi|\Delta^2 x(t)|\psi\rangle$, dove

$$\Delta^2 x = (\Delta x)^2 = (x - \langle x\rangle)^2. \tag{15}$$

Usando i risultati dei punti precedenti sappiamo che

$$\Delta x(t) = x(t) - \langle x(t)\rangle = -\frac{\kappa t^2}{2m} + \frac{p(0)}{m}t + x(0) - \left(-\frac{\kappa t^2}{2m} + \frac{\langle p(0)\rangle}{m}t + \langle x(0)\rangle\right) \tag{16}$$

$$= \Delta p(0)\frac{t}{m} + \Delta x(0). \tag{17}$$

Quindi abbiamo che

$$\Delta^2 x(t) = \left(\Delta p(0)\frac{t}{m} + \Delta x(0)\right)^2 = \Delta^2 p(0)\frac{t^2}{m^2} + \Delta^2 x(0) + \frac{t}{m}\Big(\Delta p(0)\Delta x(0) + \Delta x(0)\Delta p(0)\Big). \tag{18}$$

Quando calcoliamo il valor medio l'ultimo termine si annulla per quanto detto nel suggerimento. In conclusione troviamo che

$$\langle\Delta^2 x(t)\rangle = \langle\Delta^2 p(0)\rangle\frac{t^2}{m^2} + \langle\Delta^2 x(0)\rangle. \tag{19}$$

(9)

L'equazione agli autovalori è

$$\langle p|H|\psi\rangle = E\langle p|\psi\rangle, \tag{20}$$

cioè

$$\frac{d\psi_E(p)}{dp} = \frac{1}{i\hbar\kappa}[\frac{p^2}{2m} - E]\psi_E(p). \tag{21}$$

La soluzione di questa equazione differenziale puo essere ottenuta per separazione di variabili ed è

$$\psi_E(p) = Ne^{\frac{i}{\hbar\kappa}[\frac{p^3}{6m} - Ep]} \tag{22}$$

La normalizzazione è impropria, in quanto lo spettro di valori di energia è continuo. La condizione è $\langle\psi_E|\psi_E\rangle = \delta(E - E')$, da cui si ottiene che la costante di normalizzazione N vale

$$N = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar\kappa}}. \tag{23}$$

(10)

Per verificare se l'operatore D sia conservato o meno dobbiamo calcolare

$$[D, H] = \left[xp + px, \frac{p^2}{2m} + \kappa x\right]. \tag{24}$$

Calcolando il primo termine abbiamo che

$$[xp, p^2] = [xp, p]p + p[xp, p] = [x, p]p^2 + x\cancel{[p, p]}p + p[x, p]p + px\cancel{[p, p]} = 2i\hbar p^2. \tag{25}$$

Calcolando analogamente gli altri termini troviamo

$$[px, p^2] = 2i\hbar p^2, \tag{26}$$
$$[xp, x] = -i\hbar x, \tag{27}$$
$$[px, x] = -i\hbar x \tag{28}$$

e mettendo tutto insieme si trova

$$[D, H] = 2i\hbar\left(-\kappa x + \frac{p^2}{m}\right). \tag{29}$$

Quindi l'operatore D non è conservato Questoè quanto che ci aspettiamo, poichéDè il generatore delle dilatazioni (a meno di un fattore costante), che non sono una simmetria dell'hamiltoniana. Infatti una dilatazione trasforma $x \to x' = \alpha x$ e $p \to p' = p/\alpha$ e quindi $H' \neq H$.

(11)

Dobbiamo calcolare $\langle\psi'|\Delta^2 x|\psi'\rangle$ con $|\psi'\rangle = e^{i\lambda D}|\psi\rangle$. Troviamo

$$\langle\psi'|\Delta^2 x|\psi'\rangle = \langle\psi|e^{-i\lambda D}\Delta^2 x e^{i\lambda D}|\psi\rangle = \langle\psi|e^{-i\lambda D}\Big(x - \langle\psi'|x|\psi'\rangle\Big)^2 e^{i\lambda D}|\psi\rangle. \tag{30}$$

Innanzitutto abbiamo che

$$\langle\psi'|x|\psi'\rangle = \langle\psi|e^{-i\lambda D}xe^{i\lambda D}|\psi\rangle = \langle\psi|x'|\psi\rangle, \tag{31}$$

dove $x' = \alpha x = (1 + 2\hbar\lambda)x$, essendo $D/(2\hbar)$ il generatore delle dilatazioni (osservare che $\hbar\lambda$ è adimensionale in quanto λ ha dimensioni inverse di posizione per impulso).

Inoltre si ha che

$$e^{-i\lambda D}\Big(x - \langle\psi|x'|\psi\rangle\Big)^2 e^{i\lambda D} = e^{-i\lambda D}\Big(x - \langle\psi|x'|\psi\rangle\Big)e^{i\lambda D}e^{-i\lambda D}\Big(x - \langle\psi|x'|\psi\rangle\Big)e^{i\lambda D} = \tag{32}$$

$$= \Big(x' - \langle\psi|x'|\psi\rangle\Big)^2 = (1 + 2\hbar\lambda)^2\Big(x - \langle\psi|x|\psi\rangle\Big)^2. \tag{33}$$

Quindi troviamo

$$\langle\psi'|\Delta^2 x|\psi'\rangle = (1 + 2\hbar\lambda)^2\langle\psi|\Delta^2 x|\psi\rangle. \tag{34}$$