

# Soluzione dell'esame di FISICA QUANTISTICA del 16 febbraio 2023

(1) Definendo le coordinate e gli impulsi baricentrali e relative

$$\vec{R} = \frac{\vec{x}_1 + \vec{x}_2}{2}, \quad (1)$$

$$\vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2, \quad (2)$$

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2, \quad (3)$$

$$\vec{p} = \frac{\vec{p}_1 - \vec{p}_2}{2} \quad (4)$$

si ottiene

$$\frac{1}{2m}(\vec{p}_1^2 + \vec{p}_2^2) = \frac{1}{2m} \left( \frac{\vec{P}^2}{2} + 2\vec{p}^2 \right) = \frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{\vec{p}^2}{2m_r}, \quad (5)$$

con  $M = 2m$  e  $m_r = m/2$ , e

$$\frac{1}{4}m\omega_1^2(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)^2 = \frac{M}{2}\omega_1^2\vec{R}^2 = \frac{1}{2}M\omega_R^2\vec{R}^2 \quad (6)$$

$$\frac{1}{4}m\omega_2^2(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2 = \frac{1}{4}2m_r\omega_2^2\vec{r}^2 = \frac{1}{2}m_r\omega_r^2\vec{r}^2, \quad (7)$$

dove  $\omega_R = \omega_1$  e  $\omega_r = \omega_2$ . Si ottiene quindi che la hamiltoniana si separa nelle due componenti

$$H_R = \frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega_R^2\vec{R}^2, \quad (8)$$

$$H_r = \frac{\vec{p}^2}{2m_r} + \frac{1}{2}m_r\omega_r^2\vec{r}^2. \quad (9)$$

(2)

Le equazioni di Heisenberg che dobbiamo determinare sono

$$\frac{d}{dt}O = \frac{i}{\hbar}[H_0, O], \quad (10)$$

con  $O \in [\vec{R}, \vec{r}, \vec{P}, \vec{p}]$ . Notiamo che  $H_0 = H_R + H_r$  e che  $[H_R, \vec{r}] = [H_R, \vec{p}] = 0$  e  $[H_r, \vec{R}] = [H_r, \vec{P}] = 0$ . Otteniamo quindi

$$\frac{d}{dt}R_i = \frac{i}{\hbar}[H_R, R_i] = \frac{i}{\hbar} \left[ \frac{\vec{P}^2}{2M}, R_i \right] = \frac{i}{2M\hbar} [P_j P_j, R_i] = \frac{i}{2m\hbar} \left( P_j [P_j, R_i] + [P_j, R_i] P_j \right) = \frac{1}{M} P_i, \quad (11)$$

$$\frac{d}{dt}r_i = \frac{i}{\hbar}[H_r, r_i] = \frac{i}{\hbar} \left[ \frac{\vec{p}^2}{2m_r}, r_i \right] = \frac{i}{2m_r\hbar} [p_j p_j, r_i] = \frac{1}{m_r} p_i, \quad (12)$$

$$\frac{d}{dt}P_i = \frac{i}{\hbar}[H_R, P_i] = \frac{i}{\hbar} \left[ \frac{1}{2}M\omega_R^2 R_j R_j, P_i \right] = \frac{iM\omega_R^2}{2\hbar} [R_j R_j, P_i] = -M\omega_R^2 R_i, \quad (13)$$

$$\frac{d}{dt}p_i = \frac{i}{\hbar}[H_r, p_i] = \frac{i}{\hbar} \left[ \frac{1}{2}m_r\omega_r^2 r_j r_j, p_i \right] = \frac{im_r\omega_r^2}{2\hbar} [r_j r_j, p_i] = -m_r\omega_r^2 r_i. \quad (14)$$

(3)

Lo spettro della hamiltoniana  $H_R$  è data da un oscillatore armonico in due dimensioni con pulsazione  $\omega_R = \omega_1$  mentre lo spettro di  $H_r$  è dato da un oscillatore armonico in due dimensioni con pulsazione  $\omega_r = \omega_2$ .

Lo spettro è quindi dato da

$$E_{Nn} = E_N^R + E_n^r, \quad (15)$$

con

$$E_N^R = \hbar\omega_R(N + 1), \quad (16)$$

$$E_n^r = \hbar\omega_r(n + 1), \quad (17)$$

e  $N, n$  interi non negativi.

(4)

Lo stato fondamentale si ottiene per  $N = 0$  e  $n = 0$ . La funzione d'onda di un oscillatore armonico bidimensionale è

$$u_0(\vec{x}) = N_0 \exp\left(-\frac{\vec{x}^2 m\omega}{2\hbar}\right), \quad (18)$$

con  $N_0 = (m\omega/\pi\hbar)^{1/2}$ .

La funzione d'onda totale dello stato fondamentale della hamiltoniana  $H_0 = H_R + H_r$  è quindi

$$\psi_0(\vec{R}, \vec{r}) = \left(\frac{M\omega_R}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m_r\omega_r}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\vec{R}^2 M\omega_R}{2\hbar}\right) \exp\left(-\frac{\vec{r}^2 m_r\omega_r}{2\hbar}\right). \quad (19)$$

Passando alle coordinate iniziali (non richiesto, ma dato per completezza) si ottiene

$$\psi_0(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \left(\frac{2m\omega_1}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m\omega_2}{2\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{((\vec{x}_1 + \vec{x}_2)/2)^2 2m\omega_1}{2\hbar}\right) \exp\left(-\frac{(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2 m\omega_2}{4\hbar}\right) \quad (20)$$

$$= \frac{m}{\pi\hbar} (\omega_1\omega_2)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{m((\vec{x}_1 + \vec{x}_2)^2 \omega_1 + (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2 \omega_2)}{4\hbar}\right). \quad (21)$$

(5)

Con  $\omega_1 = 0$  si ottiene

$$H'_R = \frac{\vec{P}^2}{2M}, \quad (22)$$

$$H'_r = \frac{\vec{p}^2}{2m_r} + \frac{1}{2} m_r \omega_r^2 r^2. \quad (23)$$

Si ha quindi che la parte relativa è invariata ma la parte baricentrale è adesso la hamiltoniana di una particella libera. Le autofunzioni di particella libera hanno la forma

$$\psi_{\text{free}}(\vec{R}) = \frac{\exp(-i\vec{K}\vec{R})}{2\pi}, \quad (24)$$

e lo stato fondamentale si ottiene quando il baricentro è a riposo, cioè quando  $\vec{K} = 0$ . Si ottiene quindi che la funzione d'onda totale di stato fondamentale è

$$\psi'_0(\vec{R}, \vec{r}) = \left(\frac{m_r\omega_r}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{\vec{r}^2 m_r\omega_r}{2\hbar}\right). \quad (25)$$

che, scritta in funzione delle coordinate iniziali (non richiesto, ma dato per completezza) è

$$\psi'_0(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \left(\frac{m\omega_2}{4\pi^2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2 m\omega_2}{4\hbar}\right). \quad (26)$$

Per quanto riguarda la normalizzazione della funzione d'onda, notiamo che in questo caso la parte baricentrale è la funzione d'onda di una particella libera e quindi è normalizzata in senso improprio, ovvero

$$\langle \vec{K}' | \vec{K} \rangle = \delta^{(2)}(K' - K). \quad (27)$$

Ne segue che la costante di normalizzazione non si può ottenere semplicemente prendendo il limite  $\omega_1 = 0$  della normalizzazione della funzione d'onda con  $\omega_1 \neq 0$ .

(6)

Paragrafo 9.3.2 del libro di testo.

(7)

L'hamiltoniana relativa è un'oscillatore armonico bidimensionale di massa  $m_r$  e pulsazione  $\omega_r$ . Poiché l'energia è data in Eq. (17) dove  $n = n_x + n_y$ , dobbiamo contare in quanti modi i due parametri interi  $n_x$  e  $n_y$  si possono combinare per

dare  $n$ : ad  $n$  fissato  $n_x$  può assumere i valori da 0 a  $n$ , mentre ad  $n$  e  $n_x$  fissati  $n_y$  può assumere un solo valore. Quindi la degenerazione è

$$d_n = \sum_{n_x=0}^n 1 = n + 1. \quad (28)$$

(8) L'hamiltoniana di spin può essere scritta come

$$H_s = \frac{\lambda}{2\hbar^2} (S^2 - S_1^2 - S_2^2), \quad (29)$$

i cui autovalori sono

$$E_s = \frac{\lambda}{2} (s(s+1) - 4), \quad (30)$$

con  $s = 0, 1, 2$  lo spin totale. Poiché gli autostati della nuova hamiltoniana hanno anche una parte di spin  $|s, s_z, s_1, s_2\rangle$  e l'hamiltoniana non dipende da  $s_z$ , abbiamo che la parte di spin ha degenerazione

$$d_s = 2s + 1 \quad (31)$$

mentre la degenerazione della parte spaziale rimane invariata. Dunque lo spettro è dato da

$$E_{ns} = E_n^r + E_s = \hbar\omega_r(n+1) + \frac{\lambda}{2} (s(s+1) - 4) \quad (32)$$

e la degenerazione è

$$d_{ns} = (2s+1)(n+1). \quad (33)$$

(9) Dobbiamo calcolare

$$P_{nm} = \left| \frac{-i}{\hbar} \int_0^\infty dt e^{-\frac{i}{\hbar}(E_n - E_m)t} \langle \psi_m | V | \psi_n \rangle \right|^2. \quad (34)$$

Poiché siamo interessati agli autostati della hamiltoniana relativa possiamo considerare solo la parte relativa in  $E_n$  e in  $|\psi_n\rangle$ , omettendo quindi la parte baricentrale e la parte di spin. Sfruttando il fatto che il campo elettrico è diretto lungo l'asse  $x$  otteniamo

$$P_{nm} = \frac{E^2}{2m_r\omega_r} \left| \int_0^\infty dt e^{-i\omega_r(n-m)t - \frac{t}{\tau}} \langle m_x m_y | (a_x + a_x^\dagger) | n_x n_y \rangle \right|^2, \quad (35)$$

dove  $n_x + n_y = n$  e  $m_x + m_y = n$  Poiché la perturbazione dipende solo da  $a_x$  e  $a_x^\dagger$  abbiamo che  $m_y = n_y$ . Inoltre la perturbazione ha elemento di matrice nonnullo solo fra stati con  $m_x = n_x \pm 1$ . Mettendo assieme le due cose, concludiamo che sono possibili solo transizioni fra stati aventi  $m = n \pm 1$ . Tuttavia, l'ampiezza di transizione dipende dal valore di  $n_x$  ed è dunque diversa per ciascuno degli  $n+1$  stati degeneri con  $0 \leq n_x \leq n$ . Ne segue che per fissato  $n$  vi sono  $2(n+1)$  diverse probabilità di transizione  $P_{nm}^{n_x} = P_{nn\pm 1}^{n_x}$ .

Esse sono date da

$$P_{nn\pm 1}^{n_x} = \frac{E^2}{2m_r\omega_r} \left| \int_0^\infty dt \sqrt{n_x + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}} e^{\pm i\omega_r t - \frac{t}{\tau}} \right|^2 \quad (36)$$

$$= \frac{E^2}{2m_r\omega_r} \left( \left| \sqrt{n_x + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}} \frac{i\tau}{2i \pm \tau\omega} \right|^2 \right) \quad (37)$$

$$= \frac{E^2}{2m_r\omega_r} \frac{\tau^2}{\omega^2\tau^2 + 1} \left( n_x + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right) \quad (38)$$

L'approssimazione perturbativa è buona solo se

$$P_{nn\pm 1}^{n_x} \ll 1, \quad (39)$$

quindi in particolare smette di essere valida per valori di  $n_x$  sufficientemente grandi.

(10)

Se  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$  ne segue che  $E_N^R = E_n^r$  nelle Eq. (16-17). Pertanto lo spettro coincide con quello di un'oscillatore armonico isotropo in quattro dimensioni (abbiamo le due dimensioni di  $\vec{x}_1$  e le due di  $\vec{x}_2$ ). Gli autovalori saranno dati da

$$E_{N'} = \hbar\omega(N' + 2), \quad (40)$$

con  $N' = n_{x1} + n_{y1} + n_{x2} + n_{y2}$ . Per la degenerazione dobbiamo contare in quanti modi i quattro numeri interi si possono combinare per dare lo stesso risultato: ad  $N'$  fissato  $n_{x1}$  può assumere valori da 0 a  $N'$ . Ad  $N'$  e  $n_{x1}$  fissati  $n_{y1}$  può assumere

valori da 0 a  $N' - n_{x1}$ . Per  $N'$ ,  $n_{x1}$  e  $n_{y1}$  fissati  $n_{x2}$  può assumere valori da 0 a  $N' - n_{x1} - n_{y1}$ . E infine per  $N'$ ,  $n_{x1}$ ,  $n_{y1}$  e  $n_{x2}$  fissati,  $n_{y2}$  può assumere un solo valore, perchè è fissato dalla scelta dei primi 4. Quindi dobbiamo calcolare

$$d = \sum_{n_{x1}=0}^{N'} \sum_{n_{y1}=0}^{N'-n_{x1}} \sum_{n_{x2}=0}^{N'-n_{x1}-n_{y1}} 1. \quad (41)$$

Utilizzando le relazioni

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{1}{2}n(n+1), \quad (42)$$

$$\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{1}{6}n(1+n)(1+2n) \quad (43)$$

si trova che

$$d = \frac{1}{6}(1+N')(6+5N'+N'^2) = \frac{1}{6}(N+1)(N+2)(N+3). \quad (44)$$

Notare che l'ultima espressione è un caso particolare della formula generale che dà il numero di modi  $d$  di scegliere  $k$  numeri interi non negativi con fissa somma  $N$ , cioè tali che  $\sum_{i=1}^k n_k = N$ : esso è dato da

$$d = \frac{1}{(k-1)!} \prod_{i=1}^{k-1} (N+k). \quad (45)$$

(11)

Se le particelle sono identiche e di spin 0 la funzione d'onda deve essere completamente simmetrica. Poichè lo scambio delle due particelle corrisponde a cambiare il segno della coordinata relativa la simmetria sotto scambio della funzione d'onda totale coincide con la parità della funzione d'onda relativa, qualunque sia la funzione d'onda baricentrale. Dunque spettro e degenerazione della parte baricentrale restano invariati.

Per quanto riguarda la parte relativa, 'lPoichè abbiamo un oscillatore isotropo bidimensionale, la cui funzione d'onda è il prodotto delle due funzioni d'onda unidimensionali, cioè

$$\psi_n(\vec{r}) = \psi_{n_x}(r_x)\psi_{n_y}(r_y) \quad (46)$$

(con  $n = n_x + n_y$ ), dobbiamo imporre che queste ultime siano o entrambe pari o entrambe dispari (il prodotto di due funzioni pari è una funzione pari e lo stesso per due funzioni dispari). Dato le autofunzioni dell'oscillatore armonico sono pari se  $n_i$  è pari e dispari se  $n_i$  è dispari abbiamo che  $n_x$  e  $n_y$  entrambi pari o entrambi dispari. Ne concludiamo che il numero quantico relativo  $n$  deve essere pari,  $n = 2k$  con  $k$  intero non-negativo. La degenerazione dell  $n$ -esimo livello resta invariata in quanto possiamo sempre scegliere  $0 \leq n_x \leq n$ : visto che  $n$  è pari,  $n_x$  e  $n_y$  hanno automaticamente la stessa parità.

Lo spettro è dunque dato da

$$E_{Nk} = \hbar\omega_R(N+1) + \hbar\omega_r(2k+1). \quad (47)$$

e la degenerazione

$$d_{Nk} = (N+1)(2k+1). \quad (48)$$