Soluzione dell'esame di FISICA QUANTISTICA del 22 giugno 2023

(1)

Poiché $\lambda = 0$ la hamiltoniana è separabile in tre hamiltoniane commutanti, ciascuna relativa alla i-esima particella:

$$H = H_1(x_1) + H_2(x_2) + H_3(x_3), \tag{1}$$

dove $H_i(x_i)$ è un'Hamiltoniana di oscillatore armonico in una dimensione di massa m e pulsazione ω. Quindi lo spettro è dato dalla somma degli spettri:

$$E_{n_1,n_2,n_3} = \hbar\omega\left(n_1 + n_2 + n_3 + \frac{3}{2}\right) = \hbar\omega\left(n + \frac{3}{2}\right) \quad n \geq 0. \tag{2}$$

(2)

La degenerazione per dato n è data dal numero di terne n_1, n_2 e n_3 tali che la somma dia n:

$$d = \sum_{n_1=0}^{n}\sum_{n_2=0}^{n-n_1} 1 = \sum_{n_1=0}^{n}(n - n_1 + 1) = (n+1)^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}(n+1)(n+2). \tag{3}$$

(3)

Per le proprietà dell'Hamiltoniana discusse in precedenza abbiamo che

$$\psi_0(x_1, x_2, x_3) = \psi_0(x_1)\psi_0(x_2)\psi_0(x_3), \tag{4}$$

dove la funzione d'onda di stato fondamentale per un oscillatore armonico unidimensionale è

$$\psi_0(x) = (\frac{m\omega}{\hbar\pi})^{1/4} e^{-\frac{m\omega^2}{2\hbar}x^2}. \tag{5}$$

Troviamo dunque

$$\psi_0(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{\frac{3}{4}} e^{-\frac{m\omega^2}{2\hbar}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}. \tag{6}$$

(4)

Usando le proprietà di commutazione di posizione e impulso troviamo che

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{[x_i, H]}{i\hbar} = \frac{p_i}{m}, \tag{7}$$

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{[p_i, H]}{i\hbar} = -m\omega^2 x_i - \lambda\delta_{i2}. \tag{8}$$

(5)

Ponendo $\lambda = 0$ nel risultato del punto precedente, le equazioni ricavate diventano quelle di tre oscillatori armonici unidimensionali

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{p_i}{m}, \tag{9}$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -m\omega^2 x_i. \tag{10}$$

Derivando la prima equazione rispetto al tempo troviamo

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{1}{m}\frac{dp_i}{dt} = -\omega^2 x_i, \tag{11}$$

la cui soluzione è

$$x_i(t) = A_i\cos(\omega t) + B_i\sin(\omega t) \tag{12}$$

e quindi

$$p_i(t) = m\frac{dx_i}{dt} = -A_i m\omega\sin(\omega t) + B_i m\omega\cos(\omega t). \tag{13}$$

Usando le condizioni iniziali

$$x_i^0 = x_i(0) = A_i, \tag{14}$$
$$p_i^0 = p_i(0) = B_i m\omega \tag{15}$$

troviamo

$$x_i(t) = x_i^0 \cos(\omega t) + \frac{p_i^0}{\omega m} \sin(\omega t), \tag{16}$$
$$p_i(t) = -x_i^0 m\omega \sin(\omega t) + p_i^0 \sin(\omega t). \tag{17}$$

(6)

Paragrafo 10.4.2 del libro di testo.

(7)

Ora abbiamo $H = H_0 + H_s$. La parte spaziale e quella di spin commutano poiché sono relative a due spazi diversi e quindi lo spettro è

$$E = E_{n_1,n_2,n_3} + E_s, \tag{18}$$

con E_{n_1,n_2,n_3} data dalla Eq. (2). La parte di spin può essere riscritta come

$$H_s = -\frac{\mu}{2}\left(s^2 - s_1^2 - s_2^2 - s_3^2\right), \tag{19}$$

dove $s = s_1 + s_2 + s_3$ è lo spin totale. Componendo sequenzialmente gli spin troviamo che componendo due spin i valori permessi dello spin totale sono $s_{12}^{\mathrm{tot}} = 0,\ 1$, e coponendo ciascuno di questi due valori con il terzo spin troviamo che i valori permessi per lo spin totale sono $s_{123}^{\mathrm{tot}} = s = 1/2,\ 3/2$. Quindi abbiamo

$$E_s = -\frac{\mu\hbar^2}{2}\left(s(s+1) - \frac{9}{4}\right); \quad s = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}. \tag{20}$$

(8)

Nel caso $\lambda \neq 0$ la hamiltoniana relativa alla seconda particella $H_2(x_2)$ può essere riscritta come

$$H_2(x_2) = \frac{1}{2}m\omega^2\left(x_2 + \frac{\lambda}{m\omega^2}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{m\omega^2}. \tag{21}$$

Con un cambio di variabili $x_2 \to x_2' = x_2 + \frac{\lambda}{m\omega^2}$, la hamiltoniana può essere riscritta come

$$H_0 = H_1(x_1) + H_2(x_2') + H_3(x_3) - \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{m\omega^2}, \tag{22}$$

e dunque lo spettro è

$$E = E_{n_1,n_2,n_3} - \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{m\omega^2} \tag{23}$$

e la degenerazione non dipende dal valore di λ ed è dunque sempre data dalla Eq. (3).

Lo stato fondamentale è $n_i = 0$, quindi la funzione d'onda di stato fondamentale è

$$\psi(x_1, x_2, x_3 = \psi_0(x_1)\psi_0(x_2')\psi_0(x_3), \tag{24}$$

dove $\psi_0(x)$ è data dalla Eq. (5).

Per quanto riguarda i valori medi di x_i e p_i sugli autostati della hamiltoniana dobbiamo calcolare $\langle n_1, n_2, n_3|x_i|n_1, n_2, n_3\rangle$ e $\langle n_1, n_2, n_3|p_i|n_1, n_2, n_3\rangle$. Per il primo abbiamo che se $i = 1, 3$ allora il risultato è dato da

$$\langle n_1, n_2, n_3|x_1|n_1, n_2, n_3\rangle = \langle n_1|x_1|n_1\rangle\langle n_2, n_3|n_2, n_3\rangle = \langle n_1|x_1|n_1\rangle = 0, \tag{25}$$

e lo stesso per x_3. Se $i = 2$ invece

$$\langle n_1, n_2, n_3|x_2|n_1, n_2, n_3\rangle = \langle n_2|x_2|n_2\rangle\langle n_1, n_3|n_1, n_3\rangle = \langle n_2|x_2|n_2\rangle = \langle n_2|x_2' - \frac{\lambda}{m\omega^2}|n_2\rangle = -\frac{\lambda}{m\omega^2}. \tag{26}$$

In tutti i casi abbiamo sfruttato il fatto che per un oscillatore armonico unidimensionale $\langle n|x|n\rangle = 0$. Per quanto riguarda p_i, poiché una traslazione spaziale non cambia l'operatore impulso abbiamo che $p_2 = p_2'$ e quindi

$$\langle n_1, n_2, n_3|p_1|n_1, n_2, n_3\rangle = \langle n_1, n_2, n_3|p_2|n_1, n_2, n_3\rangle = \langle n_1, n_2, n_3|p_3|n_1, n_2, n_3\rangle = 0. \tag{27}$$

Poiché la funzione d'onda di stato fondamentale nel caso $\lambda \neq 0$ si ottiene da quella per il caso $\lambda = 0$ agendo con una traslazione spaziale sulla seconda particella abbiamo

$$\mathcal{O}_\lambda = T_2\left(\frac{\lambda}{m\omega^2}\right). \tag{28}$$

Ricordando che

$$T(\delta) = e^{i\frac{p}{\hbar}\delta} = e^{i\frac{p}{\hbar}\delta} \tag{29}$$

abbiamo

$$\mathcal{O}_\lambda = e^{i\frac{p_2}{\hbar}\frac{\lambda}{m\omega^2}}, \tag{30}$$

con $p_2 = -i\hbar\frac{d}{dx_2}$.

(9)

Ora consideriamo $H_0(\lambda = 0)$ come la hamiltoniana imperturbata e trattiamo il termine proporzionale a λ come una perturbazione. L'energia dello stato fondamentale corretta fino al secondo ordine è

$$E_0 = E_0^{(0)} + E_0^{(1)} + E_0^{(2)}, \tag{31}$$

dove $E_n^{(0)}$ è dato da Eq. (2) e

$$E_0^{(1)} = \langle\psi_0|\lambda x_2|\psi_0\rangle, \tag{32}$$

$$E_0^{(2)} = \sum_{m\neq 0}\frac{|\langle\psi_0|\lambda x_2|\psi_m\rangle|^2}{E_0 - E_m}, \tag{33}$$

con $|\psi_0\rangle$ lo stato fondamentale della hamiltoniana imperturbata, cioè $|\psi_0\rangle = |000\rangle$ e m uno stato qualsiasi, ovvero $|\psi_m\rangle = |m_1, m_2, m_3\rangle$. Esprimendo l'operatre posizione in termini di operatori di creazione e distruzione

$$x_2 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a_2 + a_2^\dagger) \tag{34}$$

si vede immediatamente che $E_n^{(1)} = 0$, come ci aspettavamo, visto che al punto (8) avevamo trovato che la correzione dovuta al pezzo proporzionale a λ è $\mathcal{O}(\lambda^2)$. Per quanto riguarda la correzione al secondo ordine, l'unico termine che sopravvive nella sommatoria è quello dato da $|\psi_m\rangle = |010\rangle$, e quindi

$$E_0^{(2)} = \frac{|\langle 000|\lambda x_2|010\rangle|^2}{E_{000} - E_{010}} = -\frac{\lambda^2}{2m\omega^2}|\langle 000|(a_2 + a_2^\dagger)|010\rangle|^2 = -\frac{\lambda^2}{2m\omega^2}, \tag{35}$$

che è proprio il termine aggiuntivo che avevamo trovato al punto (8).

(10)

Poiché la hamiltoniana spaziale e quella di spin commutano, la degenerazione della hamiltoniana H è data dal prodotto della degenerazione spaziale d Eq. (3) e dalla degenerazione di spin:

$$d^{\text{tot}} = d \cdot d_s. \tag{36}$$

La degenerazione di spin è $d_s = 4$ per gli stati con $s = 3/2$, corrispondente ai quattro possibili valori di s^z, e anche $d_s = 4$ per gli stati con $s = 1/2$, corrispondente ai due possibili valori di s^z, ma contati due volte perche' ciascuno stato con $s = 1/2$ può essere realizzato sia con $s_{12}^{\text{tot}} = 0$ che con $s_{12}^{\text{tot}} = 1$. Notare infatti che per tre spin 1/2 vi devono essere $2^3 = 8$ stati di spin in totale. La degenerazione è dunque

$$d^{\text{tot}} = 4d. \tag{37}$$

Le funzioni d'onda di stato fondamentale sono date dal prodotto dalla funzione d'onda di stato fondamentale spaziale Eq. (6), volte la funzione d'onda di stato fondamentale di spin, che corrisponde al caso $s = 3/2$ con uno dei quattro possibili valori per s_z^{tot}. Le quattro funzioni d'onda di spin corrispondenti si possono dewterminare usando il suggerimento ed osservando che la funzione d'onda di spin nel caso $\left|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle$ è manifestamente completamente simmetrica:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle &= \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle, \\
\left|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right\rangle + \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle + \left|-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle\right), \\
\left|\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right\rangle + \left|-\frac{1}{2}\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right\rangle + \left|-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle\right), \\
\left|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle &= \left|-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right\rangle..
\end{aligned} \tag{38}$$

Nel caso di particelle identiche osserviamo che per il principio di Pauli le tre particelle devono essere in tre stati diversi. Poiché $\omega \gg \lambda$ lo stato fondamentale si trova mettendo il massimo numero possibile di particelle nello stato fondamentale di oscillatore armonico, quindi $n_1 = 0$, $n_2 = 0$ con due valori opposti dello spin. La terza particella deve necessariamente essere nel primo stato eccitato di oscillatore $n_3 = 1$, con un valore qualunque dello spin. Ne segue che l'energia della parte spaziale è data dalla Eq. (2) con $n_1 = 0$, $n_2 = 0$, $n_3 = 1$, mentre l'autovalore della terza componente dello spin è

$$s_z^{\text{tot}} = +\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} = \pm\frac{1}{2}. \tag{39}$$

(11)
La trasformazione di coordinate data è una rotazione di angolo $\theta = \pi/4$ attorno a x_3 nello spazio vettoriale (x_1, x_2, x_3). $\mathcal{R}$. L'operatore che realizza questa trasformazione sullo spazio dei ket, cioè tale che $\mathcal{R}|x_1 x_2 x_3\rangle = |x_1' x_2' x_3'\rangle$ (come richiesto dalla domanda) è

$$\mathcal{R} = \exp\left(-i\frac{J_z}{\hbar}\frac{\pi}{4}\right) \tag{40}$$

con $J_z = x_1 p_2 - x_2 p_1$. Notare il segno dovuto al fatto che l'operatore sta agendo sullo spazio dei ket (cfr. le Eq. (10.126-10.128) del libro di testo).