Soluzione dell'esame di FISICA QUANTISTICA 2 del 25 luglio 2022

(1)

Nel caso $\vec{A}(\vec{x}) = 0$ si ottiene

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{i}{2m\hbar}\big[\sigma_j p_j \sigma_k p_k, p_i\big] = \frac{i}{2m\hbar}\sigma_j\sigma_k\big[p_j p_k, p_i\big] = 0. \tag{1}$$

(2)

$$\begin{aligned} v_i = \frac{dx_i}{dt} &= -\frac{i}{2m\hbar}\big[x_i, \sigma_j p_j \sigma_k p_k\big] = -\frac{i}{2m\hbar}\sigma_j\sigma_k\big[x_i, p_j p_k\big] \\ &= -\frac{i}{2m\hbar}\sigma_j\sigma_k\big(i\hbar\delta_{ij}p_k + i\hbar\delta_{ik}p_j\big) = \frac{1}{2m}\big(\sigma_i\sigma_k + \sigma_k\sigma_i\big)p_k. \end{aligned} \tag{2}$$

(3)

Data la forma esplicita di $\vec{A}(\vec{x})$, sappiamo che $A_i = \delta_{i2}Bx_1$ e quindi che $\partial_i A_j = \delta_{i1}\delta_{j2}B$. Troviamo dunque

$$\begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= \frac{i}{2m\hbar}\big[\sigma_k(p_k - A_k)\sigma_j(p_j - A_j), p_i\big] = \frac{i}{2m\hbar}\sigma_k\sigma_j\big([A_kA_j, p_i] - [p_kA_j, p_i] - [A_kp_j, p_i]\big) \\ &= -\frac{B}{2m}\sigma_k\sigma_j\big(A_k\partial_iA_j + \partial_iA_kA_j - p_k\partial_iA_j - \partial_iA_kp_j\big) = -\frac{1}{2m}\sigma_k\sigma_j\big(A_k\delta_{i1}\delta_{j2} + A_j\delta_{i1}\delta_{k2} - p_k\delta_{i1}\delta_{j2} - p_j\delta_{i1}\delta_{k2}\big) \\ &= \frac{B\delta_{i1}}{2m}\left(\sigma_k\sigma_2 + \sigma_2\sigma_k\right)\left(p_k - A_k\right). \end{aligned} \tag{3}$$

(4) Utilizzando il suggerimento, vediamo che il risultato della domanda (2) può essere riscritto come

$$v_i = \frac{1}{2m}\big(\sigma_i\sigma_k + \sigma_k\sigma_i\big)p_k = \frac{p_i}{m}. \tag{4}$$

Abbiamo dunque immediatamente che v_i è proporzionale alla matrice identità e quindi commuta con tutte le matrici di Pauli:

$$\big[v_i, \sigma_j\big] = \frac{1}{m}[p_i, \sigma_j] = 0. \tag{5}$$

(5) Usando il risultato della domanda precedente si ha immediatamente che

$$[v_i, v_j] = \frac{1}{m^2}[p_i, p_j] = 0, \tag{6}$$

$$[v_i, x_j] = \frac{1}{m}[p_i, x_j] = -\frac{i\hbar\delta_{ij}}{m}, \tag{7}$$

$$[v_i, p_j] = \frac{1}{m}\big([p_i, p_j] = 0. \tag{8}$$

(6)

Sezione 10.4.1 del libro di testo.

(7)

Per prima cosa dobbiamo determinare gli operatori v_i nel caso $\vec{A}(\vec{x}) \neq 0$:

$$\begin{aligned} v_i = \frac{dx_i}{dt} &= -\frac{i}{2m\hbar}\big[x_i, \sigma_k(p_k - A_k)\sigma_j(p_j - A_j)\big] = \frac{1}{2m}\big(\sigma_k\sigma_i(p_k - A_k) + \sigma_i\sigma_k(p_k - A_k)\big) \\ &= \frac{1}{2m}\big(\sigma_k\sigma_i + \sigma_i\sigma_k\big)(p_k - A_k) = \frac{1}{m}(p_i - A_i) = \frac{1}{m}(p_i - \delta_{i2}Bx_1). \end{aligned} \tag{9}$$

Utilizzando l'espressione di v_i di equazione 9, la hamiltoniana si può scrivere come

$$H = \frac{m}{2}(\sigma_iv_i)^2 = \frac{m}{2}(\sigma_i\sigma_jv_iv_j). \tag{10}$$

Utilizzando il suggerimento ($\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k$) si ottiene quindi

$$H = \frac{m}{2}(\delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k)v_iv_j = \frac{m}{2}\big(v^2 - \frac{\hbar B}{m^2}\epsilon_{12k}\sigma_k\big) = \frac{m}{2}\big(v^2 - \frac{\hbar B}{m^2}\sigma_3\big), \tag{11}$$

dove nel primo passaggio si è usata la proprietà $\epsilon_{ijk}v_iv_j = \epsilon_{ijk}[v_i, v_j]/2$ e l'espressione esplicita di $[v_i, v_j]$ ottenuta in Eq. (6). In particolare

$$\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}[v_i, v_j] = \frac{B}{2m^2}i\hbar\epsilon_{ijk}(\delta_{i1}\delta_{j2} - \delta_{i2}\delta_{j1}) = \frac{B}{2m^2}i\hbar(\epsilon_{12k} - \epsilon_{21k}) = \frac{B}{m^2}i\hbar\epsilon_{12k}. \tag{12}$$

Quindi, definendo un vettore $\vec{B} = (0, 0, B)$, la hamiltoniana si puo anche scrivere come

$$H = \frac{m}{2}\big(v^2 - \frac{\hbar}{m^2}\vec{B}\cdot\vec{\sigma}\big). \tag{13}$$

Si può quindi dividere questa hamiltoniana in due hamiltoniane commutanti, una spaziale

$$H_x = \frac{m}{2}v^2, \tag{14}$$

e una di spin

$$H_\sigma = -\frac{1}{2m}\hbar B\sigma_3, \tag{15}$$

tali che $H = H_x + H_\sigma$

(8)

Abbiamo che

$$H_1 = \langle k_2k_3|\, H_x\, |k_2k_3\rangle = \langle k_2k_3|\, \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + (p_2 - Bx_1)^2 + p_3^2\right)|k_2k_3\rangle = \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + (\hbar k_2 - Bx_1)^2 + \hbar^2k_3^2\right) \tag{16}$$

$$= \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + B^2\left(x_1 - \frac{\hbar k_2}{B}\right)^2 + \hbar^2k_3^2\right). \tag{17}$$

Ma ponendo $x' = \left(x_1 - \frac{\hbar k_2}{B}\right)$ vediamo che

$$H_1 = \frac{1}{2m}p_1^2 + \frac{1}{2m}B^2x'^2 + \frac{\hbar^2k_3^2}{2m} \tag{18}$$

è la hamiltoniana di un oscillatore armonico unidimensionale centrato in $\frac{\hbar k_2}{B}$, a meno di una costante additiva. Il suo spettro è dunque dato da

$$E_n^x = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar^2k_3^2}{2m} \tag{19}$$

(9)

Ora l'hamiltoniana di spin diventa

$$H_s = \frac{\hbar B}{2m}\sigma_3 + \epsilon B'\sigma_1 \tag{20}$$

Gli autostati della parte imperturbata sono $|\pm\rangle$, ovvero gli autostati di σ_3, che hanno autovalore $E_\pm = \mp\frac{\hbar B}{2m}$. La correzione al primo ordine agli autostati è

$$|-^{(1)}\rangle = \frac{\langle +|\, \epsilon B'\sigma_1\, |-\rangle}{E_+ - E_-}\,|+\rangle = -\epsilon B'\frac{m}{\hbar B}\,|+\rangle, \tag{21}$$

$$|+^{(1)}\rangle = \frac{\langle -|\, \epsilon B'\sigma_1\, |+\rangle}{E_- - E_+}\,|-\rangle = +\epsilon B'\frac{m}{\hbar B}\,|-\rangle. \tag{22}$$

Ossservando che

$$\langle\pm|H'|\pm\rangle = 0, \tag{23}$$

si vede facilmente che la correzione al secondo ordine si annulla. Infatti, la correzione al secondo ordine per lo stato $|+\rangle$ è proporzionale all'elemento di matrice di H' fra tutti gli stati diversi da $|+\rangle$ (dunque lo stato $|-\rangle$) e la correzione al primo ordine (sempre proporzionale allo stato $|-\rangle$). Essa è quindi proporzionale all'elemento di matrice diagonale di H' nello stato $|-\rangle$, che si annulla. Idem per lo stato $+\rangle$.

(10)

Si vede facilmente che H_x commuta con p_2 e p_3. Per questo motivo gli autostati di p_2 e p_3 sono anche autostati di H_x. Questo significa che gli autostati di H_x sono $|k_2, k_3, n\rangle$. Ma utilizzando il risultato del punto (8) abbiamo che

$$\langle k_2, k_3, n|\, H_x\, |k_2, k_3, n\rangle = \langle n|\, H_1\, |n\rangle = E_n^x, \tag{24}$$

dove E_n^x è dato da Eq. (19). Considerando anche la parte di spin, gli autostati sono $|k_2, k_3, n, s_z\rangle$ e l'autovalore è

$$E = E_n^x - \frac{\hbar B}{m} s_z. \tag{25}$$

Lo spettro è infinitamente degenere perché k_3 può assumere qualunque valore. Dunque, per ogni dato n, si può sempre scegliere k_3 in modo che $\frac{\hbar^2 k_3^2}{2m} = \hbar\omega m$, con m un intero positivo o negativo qualunque. Dunque qualunque valore di E_n^x può essere ottenuto in infiniti modi aggiungendo un intero m ad n e poi scegliendo k_3 in modo da sottrarre lo stesso intero.

(11)

Applicando Eq. (10) con $A_i = \delta_{i2} B x_1 + \delta_{i3} \epsilon B'' x_2$ e seguendo gli stessi passaggi, alla fine si ottiene che

$$H = \frac{m^2}{2} \left(v^2 - \frac{\hbar B}{m^2} \sigma_3 - \frac{\epsilon \hbar B''}{m^2} \sigma_1 \right), \tag{26}$$

con $v_i = (p_i - A_i)/m$. Quindi la correzione alla parte di spin si ricava dal risultato del punto (9) con la sostituzione $\epsilon B' \to -\frac{\epsilon \hbar B''}{2m}$.