

# Soluzione dell'esame di FISICA QUANTISTICA di settembre 2023

(1)

Definendo le coordinate relative e baricentriche come

$$\vec{r} = \vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(2)}, \quad \vec{R} = \frac{\vec{x}^{(1)} + \vec{x}^{(2)}}{2}, \quad (1)$$

$$\vec{p} = \frac{\vec{p}^{(1)} - \vec{p}^{(2)}}{2}, \quad \vec{P} = \vec{p}^{(1)} + \vec{p}^{(2)}, \quad (2)$$

l'hamiltoniana diventa

$$H_0 = \frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{\vec{p}^2}{2\mu} + V(\vec{r}) + V'(\vec{r}, 2\vec{p}), \quad (3)$$

con  $M = 2m$  e  $\mu = m/2$ . Poichè abbiamo che

$$[P_i, r_j] = [p_i, R_j] = 0, \quad (4)$$

le parte baricentrale e relativa di  $H_0$  commutano.

(2)

Per  $\lambda = 0$  l'hamiltoniana è

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{\vec{p}^2}{2\mu} + \frac{m\omega^2}{2} (r_1^2 + r_2^2) + \frac{m\omega'^2}{2} r_3^2 \\ &= \frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{\vec{p}^2}{2\mu} + \frac{\mu\Omega^2}{2} (r_1^2 + r_2^2) + \frac{\mu\Omega'^2}{2} r_3^2, \end{aligned} \quad (5)$$

dove abbiamo definito

$$\Omega = \sqrt{2}\omega; \quad \Omega' = \sqrt{2}\omega'. \quad (6)$$

Per quanto riguarda la parte baricentrale, essa è l'hamiltoniana di particella libera, quindi l'autovalore è  $\hbar^2 \vec{K}^2 / (2M)$ . La parte relativa invece, può essere vista come la somma di tre oscillatori armonici unidimensionali, di cui due hanno pulsazione  $\Omega$ , mentre uno ha pulsazione  $\Omega'$ . L'autovalore sarà

$$E_r = \hbar\Omega (n_1 + n_2 + 1) + \hbar\Omega' \left( n_3 + \frac{1}{2} \right). \quad (7)$$

Sommando i due contributi otteniamo

$$E = \frac{\hbar^2 \vec{K}^2}{2M} + \hbar\Omega (n_1 + n_2 + 1) + \hbar\Omega' \left( n_3 + \frac{1}{2} \right). \quad (8)$$

(3)

Nel caso  $\omega \neq \omega'$  la degenerazione è data da tutte le combinazioni di  $n_1$  e  $n_2$  tali che  $n_1 + n_2 = n$ : dobbiamo imporre

$$d(n) = \sum_{n_1=0}^n 1 = n + 1. \quad (9)$$

Nel caso  $\omega = \omega'$  dobbiamo considerare anche  $n_3$ :

$$d(n) = \sum_{n_1=0}^n \sum_{n_2=0}^{n-n_1} 1 = \frac{1}{2} (n+1)(n+2). \quad (10)$$

(4)

La funzione d'onda è data dal prodotto delle funzioni d'onda relative e baricentriche. Lo stato fondamentale sarà

$$\psi(\vec{R}, \vec{r}) = \frac{e^{-i\vec{R}\cdot\vec{K}}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \left( \frac{\mu\Omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\mu\Omega}{2\hbar}(r_1^2 + r_2^2)\right) \left( \frac{\mu\Omega'}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{\mu\Omega'}{2\hbar}r_3^2\right) \quad (11)$$

(5)

Nel caso generale l'hamiltoniana è

$$H_0 = \frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{\vec{p}^2}{2\mu} + \frac{m\Omega^2}{2}(r_1^2 + r_2^2) + \frac{m\Omega'^2}{2}r_3^2 + 2\lambda p_2 r_1. \quad (12)$$

Le equazioni del moto per le coordinate relative e baricentriche sono

$$\frac{d}{dt}r_i = \frac{1}{i\hbar}[r_i, H_0] = \frac{1}{i\hbar}\left[r_i, \frac{p_j p_j}{2\mu} + 2\lambda p_2 r_1\right] = \frac{1}{i\hbar}\left(\frac{1}{2\mu}[r_i, p_i^2] + [r_i, 2\lambda p_2 r_1]\right) = \frac{p_i}{\mu} + 2\lambda r_1 \delta_{i2}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}p_i &= \frac{1}{i\hbar}[p_i, H_0] = \frac{1}{i\hbar}\left(\left[p_i, \frac{m\Omega^2}{2}(r_1^2 + r_2^2)\right] + \left[p_i, \frac{m\Omega'^2}{2}r_3^2\right] + [p_i, 2\lambda p_2 r_1]\right) \\ &= -m\Omega^2(r_1 \delta_{i1} + r_2 \delta_{i2}) - m\Omega'^2 r_3 \delta_{i3} - 2\lambda p_2 \delta_{i1}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\frac{d}{dt}R_i = \frac{1}{i\hbar}[R_i, H_0] = \frac{1}{i\hbar}\left[R_i, \frac{P_j P_j}{2M}\right] = \frac{P_i}{M}, \quad (15)$$

$$\frac{d}{dt}P_i = \frac{1}{i\hbar}[P_i, H_0] = 0. \quad (16)$$

(6)

Sezione 9.2 del libro di testo.

(7)

Nel caso  $\omega = \omega'$  e  $\lambda = 0$  l'hamiltoniana spaziale è invariante per rotazioni, quindi senza perdere di generalità possiamo prendere  $\vec{B}$  diretto lungo  $z$ . L'hamiltoniana di spin diventa, assumendo che sia la particella 1 ad avere spin  $1/2$ ,

$$H_s = B_z s_z^{(1)}, \quad (17)$$

che ha autovalori

$$E_s = \hbar B_z m, \quad m = \pm \frac{1}{2}. \quad (18)$$

Lo spettro totale sarà dato dalla somma dello spettro spaziale con quello di spin:

$$E = \hbar\Omega(n_1 + n_2 + n_3 + \frac{3}{2}) + B_z \hbar m. \quad (19)$$

(8)

Per prima cosa notiamo che, definendo  $\vec{L}_r = \vec{r} \times \vec{p}$  con  $\vec{r}$  e  $\vec{p}$  dati al punto 1, si ottiene che  $\vec{L} = 2\vec{L}_r$ . L'hamiltoniana di spin si può quindi scrivere

$$H'_s = 2\kappa \vec{L}_r \vec{s}^{(1)} = \kappa(\vec{J}_r^2 - \vec{L}_r^2 - (\vec{s}^{(1)})^2) \quad (20)$$

dove  $\vec{J} = \vec{L}_r + \vec{s}^{(1)}$ . Per determinare lo spettro occorre dunque scegliere una base di autostati di energia in cui l'operatore  $\vec{L}_r^2$  è diagonale. Seguendo il suggerimento, in questa base lo spettro è

$$E_r = \hbar\Omega(2n + l_r + 3/2) + \hbar^2 \kappa(j_r(j_r + 1) - l_r(l_r + 1) - 3/4) \quad (21)$$

(9)

Il termine di perturbazione scritto nelle coordinate relative è  $\Delta V = 2\lambda p_2 r_1$  che, scritto in termini degli operatori di creazione e distruzione è

$$\Delta V = i\hbar\lambda(a_1^\dagger + a_1)(a_2^\dagger - a_2) \quad (22)$$

Nella base  $|n_1 n_2 n_3\rangle$ , lo stato fondamentale è  $|000\rangle$  e ha energia  $E_0 = \hbar\Omega + \hbar\Omega'/2$ . La correzione al primo ordine all'energia dello stato fondamentale data da  $\Delta V$  è quindi

$$\Delta E^{(1)} = \langle 000 | \Delta V | 000 \rangle = 0.$$

La correzione al secondo ordine è invece

$$\Delta E^{(2)} = \sum_k \frac{|\langle k | \Delta V | 0 \rangle|^2}{E_0 - E_k}. \quad (23)$$

L'unico stato  $|k\rangle$  per cui  $\langle k | \Delta V | 0 \rangle$  non è nullo è  $|110\rangle$ , per cui  $|\langle k | \Delta V | 0 \rangle|^2 = |i\lambda\hbar\langle 1 | a_1^\dagger | 0 \rangle \langle 1 | a_2^\dagger | 0 \rangle|^2 = 4\lambda^2 \hbar^2$  e  $E_k = 3\hbar\Omega + \hbar\Omega'/2$ . Si ottiene quindi

$$\Delta E^{(2)} = -\frac{4\lambda^2 \hbar^2}{2\hbar\Omega} = -\frac{2\lambda^2 \hbar}{\Omega} \quad (24)$$

L'energia dello stato fondamentale perturbato è quindi

$$E_0 + \Delta E^{(2)} = \hbar\Omega + \hbar\Omega'/2 - \frac{2\lambda^2\hbar}{\Omega} \quad (25)$$

(10)

I tre stati del secondo livello eccitato della hamiltoniana relativa sono  $|110\rangle$ ,  $|200\rangle$ ,  $|020\rangle$ . La perturbazione al primo ordine è quindi data da

$$\Delta E^{(1)} = \langle i|\Delta V|j\rangle = \lambda\hbar\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (26)$$

dove  $i, j = |110\rangle, |200\rangle, |020\rangle$ . Diagonalizzando la matrice si ottengono i seguenti autovalori  $\lambda_i$  e autovettori  $e_i$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0, e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1) \\ \lambda_2 &= \sqrt{2}, e_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2}, 1, 1) \\ \lambda_3 &= -\sqrt{2}, e_3 = \frac{1}{2}(-\sqrt{2}, 1, 1) \end{aligned} \quad (27)$$

(11)

Scrivendo la hamiltoniana relativa in termini degli operatori  $a_{1,2}, a_{1,2}^\dagger$ , si ottiene

$$H_r = \hbar\Omega \left( a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + 1 + i\frac{\lambda}{\Omega}(a_2 a_1 + a_2 a_1^\dagger - a_2^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_1^\dagger) \right) \quad (28)$$

che, definendo  $\vec{a} = (a_1, a_1^\dagger, a_2, a_2^\dagger)$ , si può scrivere

$$H_r = \vec{a}^\dagger M \vec{a} + \hbar\Omega \quad (29)$$

con

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i\lambda/2\Omega & -i\lambda/2\Omega \\ 0 & 0 & i\lambda/2\Omega & -i\lambda/2\Omega \\ -i\lambda/2\Omega & -i\lambda/2\Omega & 1 & 0 \\ i\lambda/2\Omega & i\lambda/2\Omega & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (30)$$

Essendo M hermitiana è certamente diagonalizzabile e quindi è possibile determinare esattamente lo spettro di  $H_r$ .