# Traccia di soluzione

## Meccanica quantistica - 23-1-2007

1) Il problema si separa scegliendo

$$\begin{cases} \bar{p} = \frac{1}{2}(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) \\ \bar{x} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \bar{P} = \bar{p}_1 + \bar{p}_2 \\ \bar{X} = \frac{1}{2}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) \end{cases} \quad (2)$$

dimodoché

$$H_0 = \frac{\bar{P}^2}{2M} \quad (3)$$

$$H_1 = \frac{p^2}{2\mu} - \frac{e^2}{|\bar{x}|} \quad (4)$$

con

$$M = 2m \, ; \quad \mu = \frac{m}{2} \quad (5)$$

2) Ponendo

$$H_1 |\varphi_n\rangle = E_n |\varphi_n\rangle$$

si ha che

$$\langle \bar{x} | \varphi_{n\ell m} \rangle = \langle \theta\varphi | \ell m \rangle \langle r | \varphi_{n\ell} \rangle \quad (6)$$

$$\langle r|\varphi_{n\ell}\rangle = \varphi_{n\ell}(r) = r\,u_{n\ell}(r) \tag{7}$$

e $u(r)$ soddisfa

$$\left[\frac{1}{2\mu}\left(\hbar^2\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2\ell(\ell+1)}{r^2}\right) - \frac{e^2}{r}\right]u_{n\ell}(r) = E_{n\ell}u_{n\ell}(r) \tag{8}$$

(vi è degenerazione rispetto a $m$ perché il potenziale è invariante per rotazioni).

Ponendo

$$r' = r/a_0$$

abbiamo

$$\left[\frac{1}{2\mu a_0^2}\left(\hbar^2\frac{d^2}{dr'^2} + \frac{\hbar^2\ell(\ell+1)}{r'^2}\right) - \frac{e^2}{r'a_0}\right]u_{n\ell}(r') = E_{n\ell}\,u_{n\ell}(r') \tag{9}$$

Quindi moltiplicando ambo i membri per $\frac{\mu a_0^2}{\hbar^2}$

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{dr'^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{r'^2}\right) - \frac{\mu a_0 e^2}{\hbar^2\, r'}\right]u_{n\ell}(r') = \frac{\mu a_0^2 E_{n\ell}}{\hbar^2}u_{n\ell} \tag{10}$$

Pertanto, se poniamo

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{e^2\mu} \tag{11}$$

si ha

$$E_{n\ell}\frac{a_0^2\mu}{\hbar^2} = f(n) \tag{12}$$

ossia

$$E_{n\ell} = \frac{e^4\mu}{\hbar^2}f(n) \simeq \frac{e^4 m}{2\hbar^2}f(n) \tag{13}$$

avendo usato la eq. (5). Il confronto con il caso dell'atomo di idrogeno dà

$$f(n) = \frac{1}{2n^2} \qquad (14)$$

(notare l'ulteriore fattore 2 nella (13) dovuto a $\mu = \frac{m}{2}$), degeneri rispetto ad $l$, con $l \leq n-1$

3) Poiché non vi è accoppiamento spin-orbita,

$$H_{tot}\, \Psi = E_{tot}\, \Psi \qquad (15)$$

con

$$\Psi = \psi\, \chi \qquad (16)$$

$$E_{tot} = E_n^{(n)} + E^{(s)} \qquad (17)$$

$$H_n\, \psi_n = E_n\, \psi_n \qquad (18)$$

$$H_s\, \chi = E^{(s)}\, \chi \qquad (19)$$

Le $E_n$ sono date dall'eq. (13-14), mentre $E^{(s)}$ si determina notando che

$$\bar{\sigma}_1 \cdot \bar{\sigma}_2 = \frac{1}{2}\left[(\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2)^2 - \bar{\sigma}_1^2 - \bar{\sigma}_2^2\right] \qquad (20)$$

Pertanto gli autostati ed autovalori di $H_S$ sono

$$\begin{cases} \chi^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle|-\rangle - |-\rangle|+\rangle\right) & (21) \\ E^{(s)}_{(0)} = -\frac{a}{\hbar^2}\,\frac{1}{2}\,\hbar^2\left[-2 \times \frac{3}{4}\right] = \frac{3}{4}\,a & (22) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \chi^{(1)}_{\pm 1} = |\pm\rangle|\pm\rangle & (23) \\ \chi^{(1)}_{0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle|-\rangle + |-\rangle|+\rangle\right) \end{cases}$$

$$E^{s}_{(1)} = -\frac{a}{\hbar^2}\frac{1}{2}\hbar^2\left(2-2\times\frac{3}{4}\right) = -\frac{a}{4} \qquad (24)$$

tre volte degenere

4) In questo caso, vi è accoppiamento spin orbita. La perturbazione è diagonale nella base degli autostati di $J = \bar{L}+\bar{S}$, usando la eq. (20) con $\bar{\sigma}_1 \to \bar{L}$, $\bar{\sigma}_2 \to \bar{S}$.

Abbiamo così:

$\begin{cases} n = 1 \\ l = 0 \end{cases}$

$s = 1 \Rightarrow j = 1 \quad \Delta E = 0$ tre volte degenere ($j_z = 0, \pm 1$)

$s = 0 \Rightarrow j = 0 \quad \Delta E = 0$

Su questo stato la perturbazione non ha effetto

$\begin{cases} n = 2 \\ l = 0 \end{cases}$ identico al caso precedente (la pert. non dipende da $n$)

$\begin{cases} n = 2 \\ l = 1 \end{cases}$ $s = 0 \Rightarrow j = 1 \Rightarrow$ come nei casi precedenti

$$s = 1 \Rightarrow \begin{cases} j = 0 \quad \Delta E = \varepsilon\frac{1}{2}(-2\times 2)\left(\frac{a_0}{2}(12-2)\right) = (-2\varepsilon)(5a_0) \\ j = 1 \quad \Delta E = \varepsilon\frac{1}{2}(2-2\times 2)\left(\frac{a_0}{2}(12-2)\right) = -\varepsilon(5a_0) \\ j = 2 \quad \Delta E = \varepsilon\frac{1}{2}(6-2\times 2)\left(\frac{a_0}{2}(12-2)\right) = \varepsilon(5a_0) \end{cases}$$

Pertanto nel caso $n=2$, $\ell=1$, $s=1$ i nove stati degeneri (3 valori di $s_z$ × 3 valori di $\ell_z$) si separano in tre stati con deg. $5+3+1=9$.

Se la pert. si applica ad $H_0$, la hamiltoniana imperturbata è degenere rispetto allo spin. In tal caso, il livello $n=1$ è 4 volte degenere ($2\times 2$ stati di $s_z$). La pert. non ha effetto su tale stato. Invece il livello $n=2$ è $4\times 4=16$ volte degenere: $2\times 2$ stati di $s_z$ $\times$ (3 stati di $\ell_z$ $(\ell=1)$ + 1 stato di $\ell_z$ $(\ell=0)$)

$$= 2\times 2\times(3+1)=16.$$

Con la pert. esso si separa in 4 stati: uno su cui la pert. non ha effetto $4+3 = (\ell=0, s_1=\pm, s_2=\pm) + (\ell=1, s^{tot}=0) = 7$ volte degenere, ed i tre stati in cui si separa il caso $\ell=1, s=1$

Quindi $7+5+3+1=16$ che riproduce la degener. di partenza

5) Se le due particelle sono identiche, la $\Psi$ eq. (16) deve essere antisimmetrica, visto che si tratta di fermioni.

In tal caso,

- se $s=0$, $\chi$ è antisimmetrica, $\psi$ deve essere simmetrica
- se $s=1$, $\chi$ è simmetrica, $\psi$ deve essere antisimm.

La simmetria della $\psi$ è fissata dal valore di $\ell$: se $\ell$ è pari (dispari) la $\psi$ è simmetrica (antisimm.) poiché la parità $\vec{r}\to-\vec{r}$ corrisponde allo scambio $\vec{x}_1 \leftrightarrow \vec{x}_2$

La degenerazione del livello $n$-esimo diventa pertanto:

$S=0$ nessuna degenerazione di spin

degenerazione legata a $l, m$: $2l+1$ con $l$ numero pari $\leq n-1$

Consideriamo due casi:

$n$ pari $\quad n = 2k \qquad l = 2p \Rightarrow l \leq n-1 \Rightarrow p \leq k-1$

$$d = \sum_{p=0}^{k-1} 2(2p)+1 = 4\sum_{p=0}^{k-1} p + k = 4\,\frac{1}{2}\,k(k-1) + k$$

$$= 2k^2 - k = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} = \frac{1}{2}\,n\,(n-1) \qquad (25)$$

$n$ dispari $\quad n = 2k+1 \qquad l = 2p \Rightarrow 0 \leq p \leq k$

$$d = \sum_{p=0}^{k} 4p+1 = 2k(k+1) + k = 2\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)\frac{n}{2} + \frac{n}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\,n\,(n+1) \qquad (26)$$

$s=1$ tripla deg. di spin

deg. legata a $l, m$: $2l+1$ con $l$ dispari $\leq n-1$

Ricordando che la deg. totale (pari + dispari) del livello $n$-esimo è $n^2$ abbiamo subito che

$$n \text{ pari} \qquad d = \frac{1}{2}\,n(n+1) \qquad (27)$$

$$n \text{ dispari} \qquad d = \frac{1}{2}\,n(n-1) \qquad (28)$$