Traccia di soluzione

Meccanica quantistica - 29-1-09

1) Con il cambio di variabili standard

$$\bar{r} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \qquad (1)$$

$$\bar{R} = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad (2)$$

si ha

$$H_0 = \frac{P^2}{2M} \qquad M = m_1 + m_2 = 2m \quad (3)$$

$$H_r = \frac{p^2}{2\mu} + V(r) \qquad \mu = \frac{1}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} = \frac{m}{2} \quad (4)$$

con $[p^i, r^j] = -i\hbar\,\delta^{ij} = [P^i, R^j] \qquad (5)$

$$[P^i, p^j] = [R^i, r^j] = 0 \qquad (6)$$

e $V(\bar{r}) = \mu\,\omega^2 r^2 \qquad (7)$

2) $\frac{d}{dt} P^i = \frac{1}{i\hbar}[P^i, H_0] = 0 \qquad (8)$

$$\frac{d}{dt} R^i = \frac{1}{i\hbar}\left[R^i, \frac{P^j P^j}{2M}\right] = \frac{2i\hbar}{2i\hbar M}\,\delta_{ij} P^j = \frac{P^i}{M} \quad (9)$$

3) Si tratta di un'hamiltoniana di oscillatore armonico tridimensionale con pulsazione

$$\omega' = \omega\sqrt{2} \tag{10}$$

sicché

$$\mu\,\omega^2 r^2 = \frac{1}{2}\mu\,\omega'^2 r^2 \tag{11}$$

Lo spettro è quindi

$$E_N = \hbar\omega'\left(N + \frac{3}{2}\right) \tag{12}$$

e l'N-esimo autovalore ha degenerazione

$$d_N = \frac{1}{2}(N+1)(N+2) \tag{13}$$

4) L'hamiltoniana è separabile come

$$H = H_1 + H_2 + H_3 \tag{14}$$

con

$$[H_i, H_j] = 0 \tag{15}$$

e

$$H_i = \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega\, x_i^2 \tag{16}$$

p_i, x_i operatori posizione e impulso relativi alla i-esima coordinata. Notare che m e ω in eq. (16) [illegible] sono rispettivamente pari alla massa ridotta μ eq. (4) ed alla frequenza riscalata ω' eq. (10), cioè $\mu \to m$, $\omega' \to \omega$ per semplicità di notazione

Poiché il problema è separabile, le autofunzioni di H si possono scrivere in forma fattorizzata come prodotto di autofunzioni di H_i e gli autovalori di H hanno la forma

$$E^{n_1 n_2 n_3} = E_1^{n_1} + E_2^{n_2} + E_3^{n_3} \qquad (17)$$

con

$$H_i \psi_{n_i}(x_i) = E_i^{n_i} \psi_{n_i}(x_i) \qquad (18)$$

Visto che la perturbazione agisce lungo l'asse z, studiamo il problema agli autovalori per H_3. Si ha

$$H_3 = \frac{p_3^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 z^2 + \varepsilon z^3 \qquad (19)$$

Trattando il ~~termine~~ in ε come perturbazione

$$E_n = E_n^0 + \varepsilon E_n^1 + \dots \qquad (20)$$

abbiamo

$$E_n^0 = E_3^{n_3} \qquad (21)$$

$$E_n^1 = \langle n | z^3 | n \rangle \qquad (22)$$

dove

$$\langle z | n \rangle = \psi_{n_3}(z) \qquad (23)$$

Si vede immediatamente che

$$E_n^1 = 0 \qquad (24)$$

Infatti
$$\psi_{n_3}(z) = (-1)^{n_3}\,\psi_{n_3}(-z) \tag{25}$$
quindi
$$|\psi_{n_3}(-z)|^2 = |\psi_{n_3}(z)|^2 \tag{26}$$
e
$$E_n^1 = \int_{-\infty}^{\infty} dz\; z\,|\psi_{n_3}(z)|^2 = 0 \tag{27}$$
è l'integrale di una funz. ~~...~~ antisimmetrica su un dominio simmetrico.

Equivalentemente
$$z = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\;\frac{1}{2}\left(a + a^{+}\right) \tag{28}$$
da cui si vede che z^3 ha elementi di matrice diagonali nulli, visto che
$$a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \tag{29}$$
$$a^{+}|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \tag{30}$$
La perturbazione all'autostato è data ~~da~~ al primo ordine da
$$|n^{(1)}\rangle = \sum_{m\neq n} \frac{\langle m|z^3|n\rangle}{(E_m - E_n)}\,|m\rangle \tag{31}$$
Ma
$$z^3 = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{3/2}\Big(a^3 + a^{+3} + a(a^{+})^2 + a^{+}a\,a^{+} + (a^{+})^2 a + a^{+}(a)^2 + a\,a^{+}a + (a)^2 a^{+}\Big) \tag{32}$$

Usando le eq. (29)-(30) si ha

$$z^3|n\rangle = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{3/2}\Big(\sqrt{n(n-1)(n-2)}\;|n-3\rangle +$$

$$+ \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}\;|n+3\rangle$$

$$+ \sqrt{(n+1)(n+2)^2}\;|n+1\rangle + \sqrt{(n+1)^3}\;|n+1\rangle$$

$$+ \sqrt{n^2(n+1)}\;|n+1\rangle + \sqrt{(n+1)^2 n}\;|n-1\rangle +$$

$$+ \sqrt{n^3}\;|n-1\rangle + \sqrt{n(n-1)^2}\;|n-1\rangle$$

$$= \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{3/2}\Big(\sqrt{n(n-1)(n-2)}\;|n-3\rangle +$$

$$+ \sqrt{n}\;3n\;|n-1\rangle + \sqrt{n+1}\;(3n+3)\;|n+1\rangle$$

$$+ \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}\;|n+3\rangle\Big) \qquad (33)$$

Quindi

$$|n^{(1)}{}_{z}\rangle = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{3/2}\Big(\frac{\sqrt{n(n-1)(n-2)}}{-3\hbar\omega}\;|n-3\rangle +$$

$$+ \frac{\sqrt{n}\;3n\;|n-1\rangle}{-\hbar\omega} +$$

$$+ \frac{\sqrt{n+1}\;3(n+1)\;|n+1\rangle}{\hbar\omega} +$$

$$+ \frac{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}}{3\hbar\omega}\;|n+3\rangle\Big) \qquad (34)$$

5) a) $\mathcal{P} H \mathcal{P}^{-1} = H(-\bar{p}, -\bar{x}) = H$ (35)

quindi

$$[\mathcal{P}, H] = 0 \qquad (36)$$

b)

$$\mathcal{P}_1 H_1 \mathcal{P}_1^{-1} = H_1(-p_1, -x_1) = H_1 \qquad (37)$$

$$\mathcal{P}_1 H_2 \mathcal{P}_1^{-1} = H_2 \qquad (38)$$

$$\mathcal{P}_1 H_3 \mathcal{P}_1^{-1} = H_3 \qquad (39)$$

(con H_1 dato dalla eq. (16) con $i = 1$)

quindi

$$[\mathcal{P}_1, H] = 0 \qquad (40)$$

c)

$$[\mathcal{P}, \mathcal{P}_1] = 0 \qquad (41)$$

Dimostrazione: per qualunque stato ψ

$$\langle \bar{x}_1, \bar{x}_2 | \mathcal{P} \mathcal{P}_1 | \psi \rangle = \langle -\bar{x}_1 - \bar{x}_2 | \mathcal{P}_1 | \psi \rangle = \langle -\bar{x}_1' - x_2' | \psi \rangle =$$

$$= \langle x_1 \bar{x}_2 | \mathcal{P}_1 \mathcal{P} | \psi \rangle = \langle x_1' \bar{x}_2' | \mathcal{P} | \psi \rangle = \langle -\bar{x}_1' - \bar{x}_2' | \psi \rangle \qquad (42)$$

Ovviamente $[H, L^2] = 0$ (43)

Inoltre

$$\mathcal{P} \bar{L} \mathcal{P}^{-1} = \bar{L} \qquad (44)$$

$$\mathcal{P}_1 L_x \mathcal{P}_1^{-1} = L_x \qquad (45)$$

$$\mathcal{P}_1 L_y \mathcal{P}_1^{-1} = -L_y \qquad (46)$$

$$\mathcal{P}_1 L_z \mathcal{P}_1^{-1} = -L_z \qquad (47)$$

come si può verificare scrivendo $L^i = \varepsilon^{ijk} x_j p_k$ e usando /6 la definizione di $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}_1$.

Quindi $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}_1$ lasciano invariato $\bar{L}^2$:

$$[\mathcal{P}, \bar{L}^2] = [\mathcal{P}_1, \bar{L}^2] = 0 \qquad (48)$$

NB: Gli autostati di H_0 possono essere scelti come autostati simultanei di H, L^2 ed una delle componenti di L_i.

Di solito si scelgono come autostati di L_z, ma se si vuole diagonalizzare simultaneamente $H, L^2, \mathcal{P}$ e $\mathcal{P}_1$ basta sceglierli come autostati di L_x, visto che $\mathcal{P}_1$ ed L_x commutano, cfr. eq. (44)

~~II~~ La perturbazione commuta con $\mathcal{P}_1$, visto che è diretta lungo l'asse z, ma non con $\mathcal{P}$, visto che

$$\mathcal{P}\, z^3\, \mathcal{P}^{-1} = (-z)^3 \qquad (49)$$

6) La funzione d'onda deve essere completamente antisimmetrica.

In uno stato $S^{tot} = 0$

$$\chi^{spin}_{S^{tot}=0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+ -\rangle - |- +\rangle \right) \qquad (50)$$

quindi χ^{spin} è antisimmetrica.

Perciò si deve avere

$$\psi(\bar{x}_1, x_2) = + \psi(\bar{x}_2, \bar{x}_1) \qquad (51)$$

Ma questo implica che per la coordinata relativa eq. (1)

$$\psi(\bar{r}) = \psi(-\bar{r}) \qquad (52)$$

Le autofunzioni dell'hamiltoniana relativa sono autofunz. [di] omogeneità, la cui parità è data da

$$\psi_{n_1 n_2 n_3}(-\bar{x}) = \psi_{n_1}(-x_1)\,\psi_{n_2}(-x_2)\,\psi_{n_3}(-x_3)$$

$$= (-1)^{n_1+n_2+n_3}\,\psi_{n_1 n_2 n_3}(\bar{x}) \qquad (53)$$

(coordinate cartesiane)

oppure

$$\psi_{\ell n}(-\bar{x}) = (-1)^{\ell}\,\psi_{\ell n}(\bar{x}) \qquad (54)$$

(coordinate polari)

In coord. cartesiane lo spettro è dato dalla eq. (12) con

$$N = n_1 + n_2 + n_3 \qquad (55)$$

In coord. polari lo spettro è dato dalla eq. (12) con

$$N = 2n + \ell \qquad (56)$$

Si vede che le eq. (53-55) oppure (54-56) implicano che

$$\psi_N(-\bar{x}) = (-1)^N\,\psi_N(\bar{x}) \qquad (57)$$

Perciò la eq. (52) implica che per particelle identiche lo spettro è dato ~~[illegible]~~ dalla eq. (12), ma con N pari anziché N intero qualunque. La degenerazione è sempre data dalla eq. (13) essendo interamente fissata dal valore di N.