Meccanica Quantistica

12 gennaio 2012

Traccia di soluzione

1)
$$\frac{d}{dt}\vec{p}_i = \frac{i}{\hbar}[H, \vec{p}_i] = -\vec{\nabla}_i\left(\sum_{j=1}^N V_j(\vec{x}_j) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^N\sum_{k=1}^N V_{jk}(\vec{x}_j, \vec{x}_k)\right) \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\vec{x}_i = \frac{i}{\hbar}[H, \vec{x}_i] = \frac{\vec{p}_i}{m} \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_i = \frac{i}{\hbar}[H, \vec{L}_i] = -\vec{x}_i \times \vec{\nabla}_i\left(\sum_{j=1}^N V_j(\vec{x}_j) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^N\sum_{k=1}^N V_{jk}(\vec{x}_j, \vec{x}_k)\right) \quad (3)$$

2)
$$\sum_{i=1}^N \vec{\nabla}_i \cdot \vec{J}_i = \sum_{i=1}^N -\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^*\Delta_i\psi - \psi\,\Delta_i\psi^*\right) \quad (4)$$

Ricordiamo ora che l'eq. di Schrödinger implica

$$i\hbar\frac{d}{dt}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_i\Delta_i\psi + V\psi \quad (5)$$

quindi

$$-i\hbar\frac{d}{dt}\psi^* = -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_i\Delta_i\psi^* + V\psi^* \quad (6)$$

Ne segue che

$$\sum_i \left(\psi^* \Delta_i \psi - \psi \Delta_i \psi^* \right) =$$

$$= \frac{2m}{-\hbar^2} \left(\psi^* i\hbar \frac{d\psi}{dt} + \psi i\hbar \frac{d\psi^*}{dt} \right) \quad (7)$$

Pertanto

$$\sum_{i=1}^{N} \bar{\nabla}_i \cdot \bar{J}_i = \frac{-i\hbar}{2m} \frac{2m}{-\hbar^2} i\hbar \frac{d}{dt} \psi^* \psi$$

$$= -\hbar^2 \frac{d}{dt} |\psi|^2 \quad (8)$$

come richiesto

3) $$\frac{d}{dt} \bar{P} = -\frac{1}{2} \sum_i \bar{\nabla}_i \sum_{j,k} V_{jk} (|\bar{x}_j - \bar{x}_k|)$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{jk} \frac{dV_{jk}(r)}{dr} \frac{\bar{x}_j - \bar{x}_k}{|\bar{x}_j - \bar{x}_k|} = 0 \quad (9)$$

dove con $\frac{dV_{ij}(r)}{dr}$ si intende che $V_{ij}(r)\big|_{r=|\bar{x}_i - \bar{x}_j|} =$

$= V_{ij} (\bar{x}_i - \bar{x}_j)$.

Analogamente

$$\frac{d}{dt} \bar{L} = \sum_i -\frac{1}{2} \bar{x}_i \times \bar{\nabla}_i \sum_{jk} V_{jk} (|\bar{x}_j - \bar{x}_k|)$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{jk} \frac{dV_{jk}}{dr} \bar{x}_j \times \frac{(\bar{x}_j - \bar{x}_k)}{|\bar{x}_j - \bar{x}_k|} = 0 \quad (10)$$

Se $V_i \equiv 0$ e V_{ij} dipendono solo da $|\bar{x}_i - \bar{x}_j|$, il potenziale è manifestamente invariante per traslazioni e per rotazioni. L'invarianza per traslazioni implica la conservazione dell'impulso totale, e l'invarianza per rotazioni implica la conservazione del momento angolare.

4) Per particelle identiche

$$\psi(\ldots, \bar{x}_i, \ldots, \bar{x}_j \ldots) = \pm\psi(\ldots, \bar{x}_j, \ldots \bar{x}_i, \quad) \quad (11)$$

per ogni coppia i, j con il segno + per bosoni e - per fermioni. Pertanto per particelle identiche si ha sempre

$$|\psi(\ldots, \bar{x}_i, \ldots, \bar{x}_j \ldots)|^2 = \\ = \psi(\ldots, \bar{x}_j, \ldots, \bar{x}_i, \ldots) \quad (12)$$

Usando la definizione si ha

$$\rho(\bar{x}, t) = \int d\bar{x}_1 \ldots d\bar{x}_n |\psi(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n; t)|^2 \delta^{(3)}(\bar{x} - \bar{x}_i) \quad (13)$$

Ma la eq. (12) implica che

$$\rho(\bar{x}, t) = \int d\bar{x}_1 \ldots d\bar{x}_n |\psi(x_1, \ldots, \bar{x}_i, \ldots \bar{x}_j \ldots \bar{x}_n; t)|^2 \delta^{(3)}(\bar{x} - \bar{x}_i)$$

$$= \int d\bar{x}_1 \ldots d\bar{x}_n |\psi(x_1, \ldots, \bar{x}_j, \ldots, \bar{x}_i \ldots \bar{x}_n; t)|^2 \delta^{(3)}(\bar{x} - \bar{x}_i) = \quad /3$$

$$= \int d\bar{x}_1 \dots d\bar{x}_n \, |\psi(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)|^2 \, \delta^{(3)}(\bar{x} - \bar{x}_j') \qquad (14)$$

per qualunque $\bar{x}_j$. Ciò dimostra appunto che $\rho(\bar{x})$ non dipende dal valore dell'indice di particella (i).

La $\rho(\bar{x}_i, t)$ rappresenta fisicamente la densità di probabilità che una misura di posizione sul sistema riveli la presenza di una particella in $\bar{x}$. Poiché le particelle sono identiche, tale probabilità non dipende da quale particella viene rivelata.

5) L'hamiltoniana ha la forma, in questo caso,

$$H = \frac{\bar{p}_1^2}{2m} + \frac{\bar{p}_2^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \left(\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 - 2 \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \right)$$

$$= \frac{\bar{p}_1^2}{2m} + \frac{\bar{p}_2^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2 \qquad (11)$$

Possiamo separare il moto relativo e quello del baricentro ponendo

$$\bar{r} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \qquad \bar{R} = \frac{1}{2}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) \qquad (12)$$

$$\bar{P} = \bar{p}_1 + \bar{p}_2 \qquad \bar{p} = \frac{1}{2}(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) \qquad (13)$$

$$H = \frac{p^2}{4m} + \frac{p^2}{m} + \frac{1}{2} m r^2 \omega^2$$

$$= \frac{P^2}{4m} + \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\,\omega'^2 r^2 \qquad (14)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo posto $\mu = \frac{m}{2}$, $\omega' = \sqrt{2}\,\omega$.

Lo spettro è quindi dato da

$$H = E_K + E_N \qquad (15)$$

dove
$$E_K = \frac{K^2}{2m} \qquad (16)$$

è uno spettro continuo di particella libera e

$$E_N = \hbar\omega'\left(N + \frac{3}{2}\right) . \qquad (17)$$

La degenerazione dello spettro Eq. (17) è

$$d = \frac{1}{2}(N+1)(N+2) \qquad (18)$$

6) Trattando V_{ij} come una perturbazione lo spettro imperturbato è quello di un oscill. armonico 6-dimensionale:

$$E_N = \hbar\omega\,(N+3) \qquad (19)$$

La degenerazione è determinata calcolando il modo di scegliere sei interi a somma fissa:

$$n_1+n_2+n_3+n_4+n_5+n_6 = N \, . \qquad (20)$$

Questa è data da

$$d = \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N-n_1} \sum_{n_3=0}^{N-(n_1+n_2)} \sum_{n_4=0}^{N-(n_1+n_2+n_3)} \Big(N-(n_1+n_2+n_3+n_4)+1\Big) \qquad (21)$$

Il calcolo esplicito dà

$$d = \frac{(N+1)(N+2)(N+3)(N+4)(N+5)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} \, . \qquad (22)$$

(viene considerata corretta come risposta la Eq. (21))

Al primo ordine perturbativo,

$$\Delta E = \langle N \,|\, V_{12} \,|\, N \rangle = 0 \qquad (23)$$

in quanto ~~$x_1 x_2$~~ $\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2$ contiene un numero dispari di operatori di creazione e distruzione, pertanto lo spettro e la degenerazione restano ~~invariate~~ (24)