

Esame Scritto di Meccanica Quantistica

Traccia di soluzione

30 Gennaio 2017

1. Sull'hamiltoniana data

$$H_0 = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + m \left[\left(\frac{\omega^2 + \Omega^2}{4} \right) (x_1^2 + x_2^2) + \left(\frac{\Omega^2 - \omega^2}{2} \right) x_1 x_2 \right] - B \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \quad (1)$$

il cambio di variabili per passare in coordinate baricentriche è

$$\begin{aligned} X &= \frac{x_1 + x_2}{2} & x_1 &= X + \frac{x}{2} & p_1 &= \frac{1}{2}P + p \\ x &= x_1 - x_2 & x_2 &= X - \frac{x}{2} & p_2 &= \frac{1}{2}P - p. \end{aligned} \quad (2)$$

Sostituendo si ottiene

$$H_0 = \frac{P^2}{2M} + \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}M\Omega^2 X^2 + \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2 - B \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \quad (3)$$

con $M = 2m$ e $\mu = \frac{m}{2}$. Si vede così che il problema si separa in due oscillatori armonici corrispondenti al moto baricentrico e relativo, con pulsazioni Ω ed ω rispettivamente.

La parte di spin può essere riscritta utilizzando lo spin totale $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$ della coppia di particelle come

$$H_s = -B \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = -\frac{B}{2} (S^2 - s_1^2 - s_2^2). \quad (4)$$

Un generico autostato dell'hamiltoniana è $|n_1, n_2, S, S_z, s_1, s_2\rangle$ a cui corrisponde l'autovalore

$$E_{n_1 n_2 S} = \hbar\Omega \left(n_1 + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega \left(n_2 + \frac{1}{2} \right) - \frac{B\hbar^2}{2} [S(S+1) - s_1(s_1+1) - s_2(s_2+1)], \quad (5)$$

dove quindi n_1 caratterizza il livello energetico del moto baricentrico ed n_2 quello del moto relativo. I valori permessi di n_i sono $n_i \geq 0$ intero, e i valori permessi di S sono $s_2 - s_1 \leq S \leq s_1 + s_2$, avendo supposto senza ledere la generalità $s_2 \geq s_1$.

2. Nel caso in cui $\Omega = \omega$ la hamiltoniana Eq. (1) diventa quella di un oscillatore armonico bidimensionale isotropo di pulsazione ω , come si vede anche dal fatto che l'energia Eq. (5) diventa

$$E_{nS} = \hbar\omega (n+1) - \frac{B\hbar^2}{2} \left[S(S+1) - \frac{3}{2} \right], \quad (6)$$

dove abbiamo posto

$$n = n_1 + n_2 \quad (7)$$

ed abbiamo usato il fatto che $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}$; S può quindi assumere i valori $S = 1$ oppure $S = 0$.

La degenerazione dello spettro Eq. (6) è dovuta sia alla parte spaziale (per via dell'isotropia dell'oscillatore), sia alla parte di spin. La degenerazione dovuta alla parte spaziale è $(n+1)$.

Inoltre la degenerazione dovuta alla parte di spin è $2S + 1$ poiché l'energia non dipende da S_z . La degenerazione del livello avente energia E_{nS} è quindi data da

$$d_{nS} = (2S + 1)(n + 1), \quad (8)$$

che è pari ad $n + 1$ se $S = 0$ e $3(n + 1)$ se $S = 1$.

Se $\hbar^2 B \ll \hbar\omega$ all n -esimo livello energetico dell'oscillatore bidimensionale isotropo corrispondono due livelli energetici del sistema, uno di energia più bassa con $S = 1$, $3n$ volte degenerare, ed uno di energia più alta con $S = 0$ n volte degenerare, con la separazione tra questi due livelli minore di quella tra livelli aventi diversi valori di n .

3. Si rinvia alla sezione 9.5.2 delle dispense, in particolare le Eq. (9.148-9.151).
4. La hamiltoniana H_1 è quella di due oscillatori armonici accoppiati. Per disaccoppiare i due oscillatori, scriviamo il potenziale come

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} m\omega^2 V_{ij} x^i x^j \quad (9)$$

dove la matrice V_{ij} è data da

$$V_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & 1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Gli autovalori di questa matrice sono $\lambda_1 = \frac{2}{5}$, $\lambda_2 = \frac{8}{5}$. Ne segue che passando alla base degli autovettori x'_i (coordinate normali) possiamo riscrivere la hamiltoniana come

$$H_1 = \frac{1}{2m} (p_1'^2 + p_2'^2) + \frac{1}{2} m\omega'^2 (x_1'^2 + 2x_2'^2) \quad (11)$$

con

$$\omega' = \sqrt{\frac{2}{5}} \omega. \quad (12)$$

Il problema è quindi ridotto a quello di due oscillatori armonici indipendenti, con pulsazione una doppia dell'altra. Lo spettro è dato da

$$E_m = \hbar\omega' \left(2n_1 + n_2 + \frac{3}{2} \right) = \hbar\omega' \left(m + \frac{3}{2} \right), \quad (13)$$

avendo posto

$$m = 2n_1 + n_2. \quad (14)$$

Questo significa che per dato n , n_2 deve essere pari quando n è pari e dispari quando n è dispari, e può assumere tutti i valori $0 \leq n_2 \leq n$, che sono $\frac{n+1}{2}$ quando n è dispari e $\frac{n}{2} + 1$ quando n è pari. La degenerazione è pertanto data da

$$d = \begin{cases} \frac{n}{2} + 1 & \text{se } n \text{ pari} \\ \frac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}. \quad (15)$$

5. Nel caso di particelle identiche la simmetria della funzione d'onda è fissata dal teorema spin-statistica. Poiché $\hbar^2 B \ll \hbar\omega$ lo stato fondamentale ha $n = 0$ ed il primo stato eccitato ha $n = 1$. Sfruttando il suggerimento, osserviamo che la simmetria della funzione d'onda spaziale sotto scambio delle due particelle coincide con la parità della funzione d'onda relativa, avendo separato il problema come nella domanda (1). Ricordando che la funzione d'onda dell' n -esimo stato eccitato dell'oscillatore armonico unidimensionale ha parità $(-1)^n$, e che il numero quantico associato al moto relativo è n_2 (domanda (1)) ne deduciamo che la funzione d'onda spaziale è simmetrica se il numero quantico n_2 è pari ed è antisimmetrica se n_2 è dispari.

Poiché lo spin vale $\frac{1}{2}$ si tratta di fermioni e quindi la funzione d'onda deve essere completamente antisimmetrica. Pertanto lo stato fondamentale, che ha funzione d'onda spaziale simmetrica visto che $n_2 = 0$, deve avere spin totale $S = 0$ e quindi non è degenerare:

$$\text{stato fondamentale: } n = 0; \quad S = 0; \quad d = 1 \quad (16)$$

(avendo indicato con d il grado di degenerazione).

Il primo livello eccitato della parte spaziale può avere $n_1 = 1$ ed $n_2 = 0$ oppure $n_1 = 0$ ed $n_2 = 1$. Nel primo caso, la funzione d'onda spaziale è simmetrica e quindi deve essere antisimmetrica quella di spin, pertanto $S = 0$. Nel secondo caso la funzione d'onda spaziale è antisimmetrica quindi quella di spin deve essere simmetrica pertanto $S = 1$. Ma notiamo che lo stato con $S = 1$ ha energia minore (domanda (2)) e quindi concludiamo che il primo stato eccitato ha $n_1 = 0$, $n_2 = 1$, $S = 1$ ed è quindi tre volte degenerare.

$$\text{lo stato eccitato: } n = 1; \quad S = 1; \quad d = 3. \quad (17)$$

Se le due particelle hanno spin 1 si tratta di bosoni e quindi la funzione d'onda deve essere completamente simmetrica. In questo caso i valori permessi dello spin totale sono $S = 0, 1, 2$; quando S è pari la funzione d'onda di spin è simmetrica e quando è dispari è antisimmetrica. Perciò lo stato fondamentale si separa in due stati, $S = 0$ ed $S = 2$, di cui quello con $S = 2$ ha energia minore. Il primo stato eccitato per la parte spaziale può avere $n_1 = 1$ ed $n_2 = 0$ oppure $n_1 = 0$ ed $n_2 = 1$. Nel primo caso essa è simmetrica e nel secondo è antisimmetrica. Lo stato di energia minore ha $S = 2$, e viene realizzato ponendo $n_1 = 1$ ed $n_2 = 0$ in modo che la funzione d'onda sia simmetrica. Quindi l'energia e la degenerazione del primo stato eccitato della hamiltoniana spaziale rimangono le stesse che nel caso di spin $\frac{1}{2}$, ma per quanto riguarda l'hamiltoniana complessiva l'energia totale è ora inferiore, e la degenerazione è pari a $d = 5$. Inoltre, strettamente parlando, il primo stato eccitato della hamiltoniana totale è ora lo stato fondamentale della hamiltoniana spaziale ma con spin $S = 0$, non degenerare.

6. Considerando il termine

$$H' = B' (s_1^z + 2s_2^z) \quad (18)$$

come una perturbazione agli autostati di H_0 , $|n, S, M, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ possiamo calcolare al primo ordine in B' la correzione all'energia dello stato fondamentale e al primo stato eccitato. Nel caso di particelle identiche di spin $\frac{1}{2}$ lo stato fondamentale è lo stato $|0, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ per cui la correzione è

$$\begin{aligned} E'_0 &= \langle 0, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | B' (s_1^z + 2s_2^z) | 0, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle \\ &= \frac{1}{2} (\langle \uparrow\downarrow | - \langle \downarrow\uparrow |) B' \hbar \left(-\frac{1}{2} |\uparrow\downarrow\rangle - \frac{1}{2} |\downarrow\uparrow\rangle \right) = \frac{B' \hbar}{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Il primo stato eccitato è $|1, 1, M, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$, tre volte degenerare con $M = -1, 0, 1$. La correzione al primo ordine rompe la degenerazione; la correzione per i tre stati è

$$E'_{1, M=1} = \langle 1, 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | B' (s_1^z + 2s_2^z) | 1, 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle = \langle \uparrow\uparrow | B' \hbar \frac{3}{2} | \uparrow\uparrow \rangle = \frac{3B' \hbar}{2} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} E'_{1, M=0} &= \langle 1, 1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | B' (s_1^z + 2s_2^z) | 1, 1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle \\ &= \frac{1}{2} (\langle \uparrow\downarrow | + \langle \downarrow\uparrow |) B' \hbar \left(-\frac{1}{2} |\uparrow\downarrow\rangle + \frac{1}{2} |\downarrow\uparrow\rangle \right) = \frac{B' \hbar}{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

$$E'_{1, M=-1} = \langle 1, 1, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | B' (s_1^z + 2s_2^z) | 1, 1, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle = \langle \downarrow\downarrow | B' \hbar \frac{3}{2} | \downarrow\downarrow \rangle = -\frac{3B' \hbar}{2}. \quad (22)$$

L'approssimazione perturbativa può essere valida solo se la perturbazione è piccola rispetto alla separazione dei livelli dell'hamiltoniana imperturbata H_0 .

7. Detto $|\psi(t)\rangle$ il vettore di stato in un sistema di riferimento fermo, e $|\psi'(t)\rangle$ quello in un sistema di riferimento rotante, si ha

$$|\psi'(t)\rangle = R(t)|\psi(t)\rangle, \quad (23)$$

dove

$$R(t) = \exp \frac{i}{\hbar} \omega t L, \quad (24)$$

dove ω è la velocità angolare di rotazione e $L = -i\hbar \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right)$ il generatore delle rotazioni nel piano (x_1, x_2) .

Quindi se l'evoluzione temporale di $|\psi(t)\rangle$ è governata da H_0

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H_0 |\psi(t)\rangle \quad (25)$$

si ha

$$i\hbar \frac{d}{dt} R^{-1}(t) |\psi'(t)\rangle = H_0 R^{-1}(t) |\psi'(t)\rangle \quad (26)$$

da cui con semplici passaggi si ottiene

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi'(t)\rangle = \left(R(t) H_0 R^{-1}(t) - R(t) \frac{d}{dt} R^{-1}(t) \right) |\psi'(t)\rangle. \quad (27)$$

L'evoluzione temporale di $|\psi'(t)\rangle$ è quindi governata dalla hamiltoniana

$$H'_0 = H_0 + \omega L, \quad (28)$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che H_0 è invariante per rotazioni e usato la forma esplicita di R Eq. (23).

La hamiltoniana dell'oscillatore armonico isotropo in due dimensioni commuta con i tre operatori $j_a = \sigma_{ij}^a a_i^\dagger a_j$, dove a_i sono gli operatori di distruzione nelle due dimensioni e σ_{ij}^a è la a -sima matrice di Pauli. Questi operatori hanno relazioni di commutazione analoghe a quelle degli operatori di momento angolare e forniscono quindi un insieme di operatori che commutano con la hamiltoniana ma non commutano fra di loro. È facile vedere che L è proporzionale a j_1 . Ne segue che la hamiltoniana H'_0 non commuta con gli operatori j_1 e j_2 e quindi non vi è più un insieme di operatori che commutano con la hamiltoniana ma non fra di loro, per cui in generale la corrispondente degenerazione viene rimossa.

Nel caso particolare del problema, tuttavia, la velocità di rotazione del sistema è uguale alla pulsazione dell'oscillatore. Inoltre, è possibile scrivere le autofunzioni dell'oscillatore bidimensionale isotropo in una base in cui L è diagonale. In tale base si ha che lo spettro di H'_0 è dato da

$$E_{n,m} = \hbar\omega(n + 1 + m), \quad (29)$$

dove $\hbar\omega$ è l'autovalore di L . Ricordando che i valori permessi di m per l'oscillatore armonico bidimensionale sono $-n \leq m \leq n$ con m pari (dispari) se n è pari (dispari) si vede quindi che la degenerazione è in questo particolare caso infinita.

Viene considerata valida sia la soluzione data nel caso generico, sia quella nel caso particolare di pulsazione eguale alla velocità di rotazione.