Meccanica Quantistica

14 - 2 - 2007

Traccia di soluzione

1) Poiché le due particelle hanno la stessa massa, basta porre

$$\begin{cases} \bar{P} = \bar{p}_1 + \bar{p}_2 \\ \bar{R} = \dfrac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2}{2} \end{cases} \qquad \text{operatori del baricentro} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \bar{p} = \dfrac{1}{2}(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) \\ \bar{r} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \end{cases} \qquad \text{operatori relativi} \qquad (2)$$

Si ha
$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \dfrac{1}{2}(2\bar{R} + \bar{r}) \\ \bar{x}_2 = \dfrac{1}{2}(2\bar{R} - \bar{r}) \end{cases} \qquad (3)$$

Pertanto, scrivendo l'hamiltoniana come $H = H_0 + H_E$ dove

$$H_E \equiv \left(-e_1 x_1^{(3)} - e_2 x_2^{(3)}\right) E \qquad (4)$$

si ha

$$H_E = -E\left(e_1\left(R^{(3)} + \frac{r^{(3)}}{2}\right) + e_2\left(R^{(3)} - \frac{r^{(3)}}{2}\right)\right) \qquad (5)$$

$$= -E\,(e_1 + e_2)\,R^{(3)} - \frac{E}{2}(e_1 - e_2)\, r^{(3)} \qquad (6)$$

Pertanto, ponendo
$$\begin{cases} M = 2m \\ \mu = m/2 \end{cases}$$

$$H_b = \frac{\bar{P}^2}{2M} - E(e_1+e_2)\,R^{(3)} \qquad (7)$$

$$H_r = \frac{\bar{p}^2}{2\mu} + \frac{1}{2} m\omega^2 \bar{r}^2 - \frac{E}{2}(e_1-e_2)\,r^{(3)} \qquad (8)$$

$$= \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\,\omega'^2 \bar{r}^2 - \frac{E}{2}(e_1-e_2)\,r^{(3)}$$

$$\omega' \equiv \sqrt{2}\,\omega \qquad (9)$$

2) Poniamo

$$H_R = H_0 + H_E$$

dove

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 \qquad (10)$$

(per semplicità chiamiamo m la massa ridotta e ω la frequenza ω' eq. 9)
è una hamiltoniana di osc. armonico nella coordinata relativa

e

$$H_E = -\frac{E}{2}(e_1-e_2)\;r^{(3)} \qquad (11)$$

$$= K\,r^{(3)} \quad ; \quad k \equiv -\frac{E}{2}(e_1-e_2) \qquad (12)$$

Notiamo che $\bar{L}$ è l'op. momento angolare relativo.
Si ha

$$[L^i, H_0] = [L^2, H_0] = 0 \qquad (13)$$

poiché H_0 dipende solo dai ~~moduli~~ dei vettori $\bar{x}$ e $\bar{p}$.

Inoltre

$$[L_z, H_E] = k\,[L_z, r^{(3)}] =$$

$$= k\,[r^{(1)}p^{(2)} - r^{(2)}p^{(1)}, r^{(3)}] = 0 \qquad (14)$$

Infine, ricordando che

$$[L_x, r^{(3)}] = [r^{(2)}p^{(3)} - r^{(3)}p^{(2)}, r^{(3)}] =$$

$$= r^{(2)}(-i\hbar) \qquad (15)$$

$$[L_y, r^{(3)}] = [r^{(3)}p^{(1)} - r^{(1)}p^{(3)}, r^{(3)}] \tag{16}$$

$$= -r^{(1)}(-i\hbar)$$

si ha

$$\begin{aligned}
[L^2, H_E] &= [L_x^2, H_E] + [L_y^2, H_E] \\
&= L_x[L_x, H_E] + [L_x, H_E]L_x \\
&\quad + L_y[L_y, H_E] + [L_y, H_E]L_y \\
&= k\big(L_x(-i\hbar)r^{(2)} + (-i\hbar)r^{(2)}L_x \\
&\quad + L_y(i\hbar)r^{(1)} + i\hbar\, r^{(1)}L_y\big) \\
&= -i\hbar k\left(\{L_x, r^{(2)}\} - \{L_y, r^{(1)}\}\right)
\end{aligned} \tag{17}$$

La hamiltoniana H_0 é invariante per rotazioni intorno a qualunque asse.

La hamiltoniana H_E é invariante per rotazioni intorno all'asse z ma non intorno agli altri assi.

Pertanto H_2 e L_z possono essere diagonalizzati simultanea=mente, ma H_2 e L^2 no.

3) Il problema si separa in tre problemi unidimensionali:

$$H_2 = H_x + H_y + H_z \tag{18}$$

La perturbazione non ha nessun effetto su H_x e H_y che sono ham. di oscillatore armonico unidimensionale.

Il problema si riduce quindi al calcolo della perturbazione

$$H_E = K q \tag{19}$$

sull'oscillatore armonico unidimensionale

$$H_0 = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \tag{20}$$

dove
$$\begin{cases} p \equiv p^{(3)} \\ q \equiv x^{(3)} \end{cases} \qquad (21)$$

$$E^{n}_{(0)} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega \qquad (22)$$

Si ha:

primo ordine $\qquad \Delta E^{(n)}_{(1)} = \langle n | H_E | n \rangle = 0 \qquad (23)$

secondo ordine $\qquad \Delta E^{(n)}_{(2)} = \sum_k \frac{|\langle n | H_E | k \rangle|^2}{E^n - E^k} \qquad (24)$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega} k^2 \left(\frac{|\sqrt{n+1}|^2}{E^{n+1} - E^n} + \frac{|\sqrt{n}|^2}{E^{n-1} - E^n} \right) =$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega} k^2 \left(\frac{n+1}{\hbar\omega} - \frac{n}{\hbar\omega} \right) = -\frac{k^2}{2m\omega^2} \qquad (25)$$

4) Come nella domanda precedente, ci concentriamo sull'hamiltoniana H_2. Si ha

$$H_2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 + kq$$
$$= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \left(q + \frac{k}{m\omega^2}\right)^2 - \frac{1}{2} \frac{m\omega^2 k^2}{m^2\omega^4}$$

$$= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q'^2 - \frac{1}{2} \frac{k^2}{m\omega^2} \qquad (26)$$

dove
$$q' \equiv q + \frac{k}{m\omega^2} \qquad (27)$$

Pertanto

$$H_z = H_0 - \frac{1}{2}\frac{k^2}{m\omega^2} \tag{28}$$

dove H_0 è l'ham. di un oscillatore armonico centrato in $q = -\frac{k}{m\omega^2}$.

Quindi lo spettro di H_z è

$$E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\frac{k^2}{m\omega^2} \tag{29}$$

Pertanto il risultato perturbativo al secondo ordine eq. (25) coincide con quello esatto.

Passando ora al problema tridimensionale si ha che

$$E = \hbar\omega\left(n_1+n_2+n_3+\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}\frac{k^2}{m\omega^2} \tag{30}$$

dove n_1, n_2, n_3 sono i numeri quantici relativi ai tre problemi unidimensionali H_x, H_y, H_z.
La degenerazione dello stato $N = n_1+n_2+n_3$ è la stessa dell'oscillatore armonico isotropo

$$d = \frac{1}{2}(N+1)(N+2) \tag{31}$$

poiché l'unico effetto del campo elettrico sullo spettro è di aggiungere una costante

5) Se $e_1 = e_2$ la hamiltoniana relativa coincide con quella dell'osc. armonico isotropo. Per studiare la simmetria delle soluzioni conviene diagonalizzare H_n e L^2. In tal caso

lo spettro é dato da

$$E_{n\ell} = \left(2n + \ell + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega \qquad (32)$$

ossia per lo stato N-esimo

$$E_N = \left(N + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega \qquad (33)$$

se
$$\left.\begin{array}{l} N \text{ pari} \to \ell \text{ pari} \\ N \text{ dispari} \to \ell \text{ dispari} \end{array}\right\} \ell \leq N \qquad (34)$$

Ma se ℓ pari (dispari) le autofunzioni sono pari (dispari) sotto parità, e quindi visto che $\bar{r}$ é la coord. relativa esse sono pari (dispari) sotto scambio $\bar{r}_1 \leftrightarrow \bar{r}_2$.

Poiché le particelle sono fermioni, la f. d'onda del sistema deve essere completamente antisimmetrica.

La f. d'onda di spin é simmetrica, $\chi^{(1)}$, se il sistema si trova in uno stato di spin totale $S^{tot} = 1$ e antisimmetrica $\chi^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle|-\rangle - |-\rangle|+\rangle\right)$ se il sistema si trova in uno stato di spin totale $S^{tot} = 0 = S_z^{tot}$.

Notiamo infine che

$$H_S = \frac{B}{\hbar}\bar{\sigma}_1 \cdot \bar{\sigma}_2 = \frac{B}{2\hbar}\left[(\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2)^2 - \bar{\sigma}_1^2 - \bar{\sigma}_2^2\right] \qquad (35)$$

Quindi

$$H_S\,\chi^{(0)} = \frac{B}{2\hbar}\hbar^2\left[0 - \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right] = -\hbar B\,\frac{3}{4} \qquad (36)$$

$$H_S\,\chi^{(1)} = \frac{B}{2\hbar}\hbar^2\left(2 - \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right) = \hbar B\,\frac{1}{4} \qquad (37)$$

Abbiamo quindi in entrambi i casi che

tutti i livelli eq. (32) sono permessi

se l pari $\rightarrow$ $S=0$ (f. d'onda spaziale simmetrica / " " spin antisimmetrica)

se l dispari $\rightarrow$ $S=1$ (f. d'onda spaziale antisimmetrica / " " spin simmetrica)

caso a:

Lo spettro è dato dalla eq. (33)

caso b:

se N pari $\quad E = \left(N + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega - \frac{3}{4}\hbar B \qquad (38)$

se N dispari $\quad E = \left(N + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega + \frac{1}{4}\hbar B \qquad (39)$

7) Nel caso a la deg. dello stato N-esimo è data dalla eq. (31) × degen. di spin. Poiché in entrambi i casi vi è degen. rispetto a S_z^{tot}, la deg. di spin è tre se $S=1$, uno se $S=0$. Abbiamo quindi che in entrambi i casi a e b la degenerazione è data da

se N pari $\quad d = \frac{1}{2}(N+1)(N+2)\cdot 1 \qquad (40)$

N dispari $\quad d = \frac{1}{2}(N+1)(N+2)\cdot 3 \qquad (41)$