Meccanica Quantistica

14-2-2011

Traccia di soluzione

1) Poiché le due masse sono uguali, si ha

$$\begin{cases} \bar{P} = \bar{p}_1 + \bar{p}_2 \\ \bar{X} = \dfrac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{p} = \dfrac{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}{2} \\ \bar{x} = \bar{x}_1 - x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} M = 2m \\ \mu = m/2 \end{cases} \tag{1}$$

Definiamo inoltre

$$e = e_1 + e_2$$
$$\Delta e = e_1 - e_2 \tag{2}$$

Si ha

$$H = \underbrace{\frac{P^2}{2M} + e\bar{E}\cdot\bar{X}}_{H_B} + \underbrace{\frac{p^2}{2\mu} + \mu\omega^2\bar{x}^2 + \frac{\Delta e}{2}\bar{E}\cdot\bar{x}}_{H_r} \tag{3}$$

$$= H_B + H_r$$

2) Baricentro:

$$\frac{d\bar{X}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left[\bar{X}, H_B\right] = \frac{\bar{P}}{M} \tag{4}$$

$$\frac{d\bar{P}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left[\bar{P}, H_B\right] = -e\bar{E} \tag{5}$$

$$\begin{cases} \bar{P}(t) = \bar{P}_S - e\bar{E}t \quad \text{con } \bar{P}_H(0) \equiv \bar{P}_S & (6) \\ \bar{X}(t) = \bar{X}_S + \dfrac{\bar{P}_S}{M}t - \dfrac{1}{2}e\bar{E}t^2 & (7) \end{cases}$$

3) Coordinata relativa:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\bar{x}, H_r] = \frac{\bar{p}}{m} \qquad (8)$$

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\bar{p}, H_r] = -2\mu\omega^2\bar{x} - \frac{\Delta e}{2}\bar{E} \qquad (9)$$

4) In assenza di campo elettrico, l'hamiltoniana relativa è una hamiltoniana di oscillatore armonico isotropo:

$$H_r^{(0)} = \frac{\bar{p}^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu(\sqrt{2}\omega)^2\bar{x}^2 \qquad (10)$$

avente autovalori

$$E_N^{(0)} = \hbar\sqrt{2}\omega\left(N + \frac{3}{2}\right) \qquad (11)$$

con degenerazione

$$d_N^{(0)} = \frac{1}{2}(N+1)(N+2) \qquad (12)$$

Scegliamo ora uno dei tre assi cartesiani lungo $\bar{E}$ (ad esempio, l'asse z). In tal caso possiamo separare

$$H_r^{(0)} = H_r^{(0,x)} + H_r^{(0,y)} + H_r^{(0,z)}$$

$$H_r^{(0\,i)} = \frac{p_i^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu(\sqrt{2}\omega)^2 x_i^2 \qquad (13)$$

Le hamiltoniane $H_r^{(0,x)}$, $H_r^{(0,y)}$ non sono affette dalla perturbazione, che ha esclusivamente effetto sullo spettro non degenere dell'hamiltoniana $H_r^{(0,z)}$:

$$E_N^{(0)} = E_{n_x}^{(0)} + E_{n_y}^{(0)} + E_{n_z}^{(0)} \tag{14}$$

$$E_{n_i}^{(0)} = \sqrt{2}\hbar\omega \left(n_i + \frac{1}{2} \right) \tag{15}$$

$$E_{n_x} = E_{n_x}^{(0)} \quad ; \quad E_{n_y} = E_{n_y}^{(0)}$$

Al primo ordine

$$E_{n_z} = E_{n_z}^{(0)} + \Delta^{(1)} E_{n_z}$$

$$\Delta^{(1)} E_{n_z} = \langle n_z | \frac{\Delta e}{2} \| E \| \hat{z} | n_z \rangle = 0 \tag{16}$$

Infatti ricordiamo che per un osc. ar. 1-dim di massa m e freq. ω

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{i}{m\omega} p \right) \tag{17}$$

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(a + a^\dagger \right) \tag{18}$$

Quindi $\hat{z}$ ha elementi di matrice diagonali nulli. Pertanto al primo ordine la degenerazione è la stessa che nel caso imperturbato

Al secondo ordine

$$\Delta^{(2)} E_{n_z} = \sum_{k_z \neq n_z} \frac{| \langle k_z | \frac{\Delta e}{2} \| E \| \hat{z} | n_z \rangle |^2}{(E_{n_z} - E_{k_z})} \tag{19}$$

Ma la Eq. (18) implica che $\Delta^{(2)} E_{n_z} \neq 0$, in quanto gli stati

$$k_z = n_z \pm 1$$

contribuiscono alla sommatoria Eq. (19). Pertanto

Lo spettro ha la forma

$$E_N^{(2)} = E_{n_x}^{(0)} + E_{n_y}^{(0)} + E_{n_z}^{(2)} \qquad (20)$$

con $E_{n_x}^{(0)} = E_{n_y}^{(0)}$ se $n_x = n_y$

ma $E_{n_z}^{(2)} \neq E_{n_z}^{(0)} = E_{n_x}^{(0)} = E_{n_y}^{(0)}$ se $n_z = n_x = n_y$

Quindi

$$E_{n_x n_y n_z} = \sqrt{2}\hbar\omega\,(n_x + n_y + 1) + E_{n_z}^{(2)} \qquad (21)$$

$$= E_{M n_z}$$

con $M = n_x + n_y$

La degenerazione del livello

$$E_{M n_z} \qquad (22)$$

è $M+1$ (osc. arm. bidimensionale isotropo)

N.B. Il calcolo esplicito al punto (?) mostra che

$$E_{n_z}^{(2)} = E_{n_z}^{(0)} + \text{cost.} \qquad (23)$$

dove cost. non dipende da n_z. Quindi in realtà la degenerazione è la stessa che nel caso imperturbato. Sia la Eq. (22) (che è quanto si può concludere in assenza di calcolo esplicito) sia la risposta completa sono accettate come corrette.

Il parametro dello sviluppo perturbativo è $\Delta e \|E\|$.

5) Si ha

$$H_S = \frac{k}{2}\left[(\vec{L}+\vec{S})^2 - (\vec{L}^2+\vec{S})\right] \quad (24)$$

Pertanto

$$H_2 | n\, l\, s\, j\, j_z \rangle = E_{nlsj}\, | n\, l\, s\, j\, j_z \rangle \quad (25)$$

con
$$E_{nlsj} = (2n+l)\hbar\sqrt{2}\,\omega + \frac{k}{2}\hbar^2\left[j(j+1) + \right.$$
$$\left. - l(l+1) - s(s+1)\right] \quad (26)$$

con $s = 0, 1$ e se $s = 0$, $j = l$

$s = 1$, $j = \begin{cases} l-1 \\ l \\ l+1 \end{cases}$

Pertanto per l, s, j generici l'unica degenerazione è rispetto a j_z, da cui E eq. (26) non dipende. Pertanto

$$d_j = 2j+1 \quad (27)$$

Per valori particolari di s o j la deg. è maggiore. In particolare se $s=0$, allora $j = l$ ed il termine in parentesi quadre nella Eq. (26) si annulla: si riottiene la deg. dell'oscillatore isotropo, $d = \frac{1}{2}(N+1)(N+2)$. Se $s = 1$ ma $j = l$ allora i termini in j ed l in parentesi quadre Eq. (26) si cancellano. Anche in tal caso si riottiene la deg. dell'oscillatore isotrop.

6) Nel caso di particelle identiche, se $s=0$ allora l deve essere pari e se $s=1$ l deve essere dispari, in quanto uno stato di momento angolare l ha parità $(-1)^l$ ma la parità della f. d'onda relativa coincide con il comportamento sotto scambio della f. d'onda del sistema di due particelle.

7) La hamiltoniana ha la forma

$$H_2 = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu(\sqrt{2}\,\omega)^2 x^2 + \frac{\Delta e}{2}\,\bar{E}\cdot\bar{x}$$

$$= \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu(\sqrt{2}\,\omega)^2\left(\bar{x} + \frac{\Delta e\,\bar{E}}{2\mu(\sqrt{2}\,\omega)^2}\right)^2$$

$$- \frac{1}{2}\,\frac{(\Delta e)^2\|\bar{E}\|^2}{4\mu(\sqrt{2}\,\omega)^2} \qquad (29)$$

Pertanto, lo spettro è:

$$E_N = \hbar\omega\left(N + \frac{3}{2}\right) - \frac{\Delta e^2\|\bar{E}\|^2}{16\,\mu\,\omega^2} \qquad (30)$$

$$d_N = \frac{1}{2}(N+1)(N+2)$$

Usando la Eq. (19) si ha

$$\Delta^{(2)}E_{n_2} = \frac{\Delta e^2\|E\|^2}{4}\left(\frac{n+1}{-\hbar\sqrt{2}\,\omega} + \frac{n}{\hbar\sqrt{2}\,\omega}\right)\left(\sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\sqrt{2}\,\omega}}\right)^2$$

$$= -\frac{\Delta e^2\|E\|^2}{16\mu\,\omega^2} \qquad (31)$$

Si vede pertanto che

- il risultato esatto coincide col calcolo perturbativo al 2ndo ordine
- poiché la dip. da n della perturbazione si cancella, la degenerazione non è affetta dalla perturbazione contrariamente a quanto sembra se non se ne determina la forma esplicita.

· La ragione per cui la degenerazione non cambia è che l'hamiltoniana è invariante per rotazioni anche in presenza della perturbazione, purché la rotazione venga effettuata attorno al punto $\bar{x}_0$ tale che

$$\bar{x}_0 + \frac{\delta e \bar{E}}{2\mu(\sqrt{2}\omega)^2} = 0 \qquad (32)$$