Meccanica Quantistica I

4-3-2011

Traccia di soluzione

1) $$\bar{v} = \frac{d}{dt}\bar{x} = \frac{1}{i\hbar}[\bar{x}, H] = \frac{1}{m}(\bar{p} - \bar{A}(x)) \qquad (1)$$

2) $$[v_i, v_j] = \frac{-1}{m^2}\left([p_i, A_j] + [A_i, p_j]\right) =$$

$$= \frac{i\hbar}{m^2}\left(\partial_i A_j - \partial_j A_i\right) = \qquad (2)$$

$$= \frac{i\hbar}{m^2}\varepsilon^{ijk} B_k \qquad (3)$$

dove l'ultimo passaggio segue da

$$\varepsilon^{ijk} B_k = \varepsilon^{ijk}\varepsilon^{kab}\partial_a A_b$$

$$= \left(\delta^{ia}\delta^{jb} - \delta^{ib}\delta^{ja}\right)\partial_a A_b$$

$$= \partial_i A_j - \partial_j A_i \qquad (4)$$

3)

$$\frac{m}{2}(\bar{\sigma}\cdot\bar{v})^2 = \frac{m}{2}\sigma^i\sigma^j v^i v^j =$$

$$= \frac{m}{2}\,\frac{1}{2}\left(\{\sigma^i, \sigma^j\} + [\sigma^i, \sigma^j]\right) v^i v^j$$

$$= \frac{m}{4}\, 2\left(i\varepsilon^{ijk} v_j v_k \sigma_k + v_i v_i \right) \qquad (5)$$

$$= \frac{m}{2}\bar{v}^2 + i m\, \varepsilon^{ijk} [v_j, v_k]\, \sigma_i$$

$$= \frac{1}{2m}(\bar{p}-\bar{A})^2 - \frac{\hbar}{m} \varepsilon^{ijk} \varepsilon^{ija} \sigma_k B_a \qquad (6)$$

$$= \frac{1}{2m}(p-\bar{A})^2 - \frac{1}{m}\, \bar{S}\cdot\bar{B} = H \quad \text{QED} \qquad (7)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato le identità

$$\varepsilon^{ija}\, \varepsilon^{ijb} = 2\,\delta^{ab} \qquad (8)$$

$$\bar{S} = \frac{\hbar}{2}\bar{\sigma}\ . \qquad (9)$$

4) Si ha

$$H_\perp = \frac{m}{2}\left(v_x^2 + v_y^2 \right) \qquad (10)$$

$$H_z = \frac{p_z^2}{2m} \qquad (11)$$

$$H_S = \frac{B}{m} S_z \qquad (12)$$

che manifestamente commutano tra loro.

Inoltre é immediato verificare che L_z commuta con ciascuno dei tre termini Eq. (10-12) in quanto L_z genera le rotazioni attorno all'asse z, che lasciano invariante sia $v_x^2+v_y^2$, che è la norma di un vettore nel piano xy, sia p_z, che è diretto lungo l'asse z.

5) Con la sostituzione indicata nella Eq. (5) del testo si ha

$$H_\perp = \frac{mB^2}{2m^2} q^2 + \frac{m}{2}\frac{1}{m^2} p^2$$

$$= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \qquad (13)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo posto

$$\omega \equiv \frac{B}{m} \qquad (14)$$

Ora notiamo che

$$[p,q] = -\frac{m^2}{B}[v_x, v_y]$$

$$= -i\hbar \qquad (15)$$

dove l'ultimo passaggio segue dalla eq. (3) con la forma data di $\vec{B}$.

Pertanto la $H_\perp$ ha la forma di una hamiltoniana di oscillatore armonico unidimensionale, con autovalori (non-degeneri)

$$E_n^{\perp} = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) \quad , \; n \text{ intero } n \geq 0 \qquad (16)$$

Le autofunzioni di $H_{\parallel}$ sono inoltre gli autostati di p_z (impulso di particella libera lungo l'asse z)

$$E_m^{\parallel} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \qquad (17)$$

con k variabile continua.

Le autofunzioni di H_s sono infine gli autostati $|\pm\rangle$ di spin lungo l'asse z e quindi il suo spettro è

$$E_{\pm}^{s} = \pm\frac{\hbar}{2}\frac{B}{m} \qquad (18)$$

Pertanto lo spettro di H è dato dagli stati $|n \; \pm\rangle$ con energia

$$E_{nk\pm} = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \pm \frac{\hbar}{2}\frac{B}{m} \qquad (19)$$

$$= \frac{\hbar B}{m}\left(n \pm \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar^2 \ell_z^2}{2m} \qquad (20)$$

6) La probabilità è data da

$$P_n = |c_n|^2 \qquad (21)$$

con

$$c_n = +\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dt \; \lambda \langle n | q | 0 \rangle e^{-t^2/\tau^2} e^{in\omega t} \qquad (22)$$

Ma ricordando che

$$q = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a + a^{+}\right) \qquad (23)$$

si vede che $c_n = 0$ per tutti gli $n \neq 1$, mentre

$$c_1 = \frac{i\lambda}{\hbar}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\int_{-\infty}^{\infty} dt \; e^{i\omega t - t^2/\tau^2} \qquad (24)$$

$$= \frac{i\lambda\tau}{\sqrt{2m\hbar\omega}} e^{-\frac{\omega^2\tau^2}{4}}\sqrt{\pi} \qquad (25)$$

7) Tutti i livelli dello spettro Eq. (20) tranne quello con $n > 0$ sono due volte degeneri, in quanto

$$E_{n m_+} = E_{(n+1) m_-} \qquad (26)$$

L'origine della degenerazione si spiega introducendo gli operatori b^+, b tali che

$$b\,|+\rangle = |-\rangle$$
$$b^{+}|-\rangle = |+\rangle \qquad (27)$$

in termini dei quali

$$H_S = \frac{\hbar B}{m}\left(b^+ b + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega\left(b^+ b + \frac{1}{2}\right) \qquad (28)$$

Si ha quindi che

$$H_\perp + H_s = \hbar\omega \left(a^\dagger a + b^\dagger b + 1\right) \tag{29}$$

Si vede inoltre che i due operatori

$$Q = a^+ b \tag{30}$$

$$Q^+ = a\, b^+ \tag{31}$$

commutano con l'hamiltoniana ma non commutano fra di loro, spiegando l'origine della degenerazione.

L'origine della seconda degenerazione si spiega osservando che p_z è un operatore unidimensionale a spettro continuo.