Traccia di soluzione

20-6-2007

1) Possiamo scrivere il cambio di coordinate nella forma

$$x_i = R_{ij}\, x'_j \qquad (1)$$

$$x'_i = R^{-1}_{ij}\, x_j \qquad (2)$$

dove

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (3)$$

e

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (4)$$

é l'inversa, infatti

$$R R^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

Nella rapp. delle coordinate l'operatore impulso é

$$p_i = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad (6)$$

Quindi

$$p'_i = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x'_i} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = R_{ji}\, p_j \qquad (7)$$

che implica

$$p_i = R^{-1}_{ji}\, p'_j \qquad (8)$$

Abbiamo pertanto

$$
\begin{aligned}
[x'_i, p'_j] &= R^{-1}_{ia} R_{bj} [x_a, p_b] \\
&= -i\hbar\, R^{-1}_{ia} R_{bj} \delta_{ab} \\
&= -i\hbar\, \delta_{ij}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

come dove essere.

Nel nuovo sistema di coordinate abbiamo che

$$\bar{p}'^2 = \bar{p}^2 \tag{10}$$

visto che

$$
\begin{aligned}
\bar{p}'^2 = p'_i p'_i &= R_{ai} R_{bi}\, p_a p_b \\
&= R^{-1}_{ia} R_{bi}\, p_a p_b = p^2
\end{aligned}
\tag{11}
$$

poiché le eq. (3-4) implicano

$$R_{ij} = R_{ji}^{-1} \tag{12}$$

Quindi

$$
\begin{aligned}
H = \frac{p'^2}{2m} &+ \frac{1}{2} m \omega_1^2 \left(x_1'^2 \cos^2\phi + x_2'^2 \sin^2\varphi + 2 x_1' x_2' \sin\varphi\cos\varphi \right) \\
&+ \frac{1}{2} m \omega_2^2 \left(x_2'^2 \cos^2\phi + x_1'^2 \sin^2\varphi - 2 x_1' x_2' \sin\varphi\cos\varphi \right) \\
&+ \lambda \left[\left(x_2'^2 - x_1'^2 \right) \sin\phi\cos\phi + x_1' x_2' \left(\cos^2\phi - \sin^2\phi \right) \right]
\end{aligned}
\tag{13}
$$

La trasf. eq. (1) è una rotazione.

2) Riscriviamo la eq. (13) usando le identità trigonometriche come

$$H = \frac{p'^2}{2m} + \frac{1}{2}\omega_1^2 m\left[x_1'^2\cos^2\phi + x_2'^2\sin^2\phi \;+ x_1' x_2'\sin 2\phi\right]$$
$$+ \frac{1}{2}\omega_2^2 m\left[x_1'^2\sin^2\phi + x_2'^2\cos^2\phi \;- x_1' x_2'\sin 2\phi\right]$$
$$+ \frac{\lambda}{2}\left[(x_2'^2 - x_1'^2)\sin 2\phi + 2\, x_1' x_2'\cos 2\phi\right] \qquad (14)$$

$$= \frac{p'^2}{2m} + x_1'^2\left(\frac{1}{2}m\omega_1^2\cos^2\phi + \frac{1}{2}m\,\omega_2^2\sin^2\phi - \frac{\lambda}{2}\sin 2\phi\right) \qquad (15)$$
$$+ x_2'^2\left(\frac{1}{2}m\,\omega_1^2\sin^2\phi + \frac{1}{2}m\,\omega_2^2\cos^2\phi + \frac{\lambda}{2}\sin 2\phi\right)$$
$$+ x_1'x_2'\left(\frac{1}{2}\omega_1^2 m\sin 2\phi - \frac{1}{2}\omega_2^2 m\sin 2\phi + \lambda\cos 2\phi\right)$$

Questa diventa la ham. di un oscillatore ~~armonico~~ bidimensionale se il termine in $x_1' x_2'$ si annulla, cioè se

$$\frac{1}{2}m\left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right)\sin 2\phi + \lambda\cos 2\phi = 0 \qquad (16)$$

ossia

$$\mathrm{tg}\, 2\phi = -\frac{2\lambda}{m(\omega_1^2 - \omega_2^2)} \qquad (17)$$

Questa eq. ha sempre una soluzione perché quando $\pi \leq 2\phi \leq \pi$ $\mathrm{tg}\, 2\phi$ varia da $-\infty$ a ∞

Quando $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ la eq. (17) implica $\mathrm{tg}\,\phi \to \pm\infty$, $\sin 2\phi = \pm 1$, $\cos 2\phi = 0$
Prendiamo il caso $\sin 2\phi = +1$. Si ha

$$H = \frac{p'^2}{2m} + x_1'^2\left(\frac{1}{2}m\omega^2 - \frac{\lambda}{2}\right) + x_2'^2\left(\frac{1}{2}m\omega^2 + \frac{\lambda}{2}\right) \qquad (18)$$

$$= \frac{p'^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_1'^2 x_1'^2 + \frac{1}{2} m \omega_2'^2 x_2'^2 \qquad (19)$$

dove abbiamo posto

$$\omega_1'^2 = \omega^2 - \frac{\lambda}{m}$$
$$\omega_2'^2 = \omega^2 + \frac{\lambda}{m} \qquad (20)$$

Lo spettro quindi in generale è dato da

$$E_{n_1 n_2} = \hbar \left(n_1 \omega_1' + n_2 \omega_2' + 1 \right) \qquad (21)$$

e non è degenere

3) Il termine di potenziale è banalmente dato da

$$V = \frac{1}{2} m \left(\omega_1'^2 x_1'^2 + \omega_2'^2 x_2'^2 \right)$$
$$= \frac{1}{2} m \left(\omega_1'^2 r^2 \cos^2\theta + \omega_2'^2 r^2 \sin^2\theta \right) \qquad (22)$$

Per determinare il termine cinetico calcoliamo

$$-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} = J^2 = (x_1 p_2 - x_2 p_1)^2$$
$$= (x_1 p_2 - x_2 p_1)(x_1 p_2 - x_2 p_1)$$
$$= x_1 p_2 x_1 p_2 - x_2 p_1 x_1 p_2 - x_1 p_2 x_2 p_1 + x_2 p_1 x_2 p_1$$
$$= x_1^2 p_2^2 + x_2^2 p_1^2 - x_2 p_1 x_1 p_2 - x_1 p_2 x_2 p_1$$
$$= (x_1^2 + x_2^2)(p_1^2 + p_2^2) - x_2^2 p_2^2 - x_1^2 p_1^2 - x_2 p_1 x_1 p_2 - x_1 p_2 x_2 p_1$$
$$= \bar{x}^2 \bar{p}^2 - x_2 x_2 p_2 p_2 - x_1 x_1 p_1 p_1 - x_2 p_1 x_1 p_2 - x_1 p_2 x_2 p_1$$

$$= \bar{x}^2 \bar{p}^2 - x_2 p_2 x_2 p_2 - i\hbar x_2 p_2 - x_1 p_1 x_1 p_1 - i\hbar x_1 p_1$$

$$- x_2 p_2 p_1 x_1 - x_1 p_1 p_2 x_2$$

$$= \bar{x}^2 \bar{p}^2 - x_2 p_2 x_2 p_2 - x_1 p_1 x_1 p_1 - x_2 p_2 x_1 p_1 - x_1 p_1 x_2 p_2$$

$$- i\hbar (x_1 p_1 + x_2 p_2) + i\hbar (x_1 p_1 + x_2 p_2)$$

$$= \bar{x}^2 \bar{p}^2 - \bar{x}\cdot\bar{p}\, \bar{x}\cdot\bar{p} = \bar{x}^2 \bar{p}^2$$

$$= r^2 \bar{p}^2 + \hbar^2 \, r\frac{\partial}{\partial r} r\frac{\partial}{\partial r} = r^2 \bar{p}^2 + \hbar^2 \left(r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + r\frac{\partial}{\partial r} \right) \qquad (23)$$

Pertanto abbiamo che

$$\bar{p}^2 = \hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta^2} \right) \qquad (24)$$

e quindi

$$H = \frac{p^2}{2m} + V \qquad (25)$$

con p^2 data dalla eq. (24) e V data dalla eq. (22).

L'operatore R è l'op. di rotazione di angolo φ,

ossia

$$R = e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi J} \quad \text{con} \quad J = -i\hbar\frac{\partial}{\partial \theta} \qquad (26)$$

4) Lo spettro dell'ham. imperturbata è dato da

$$E_{n_1 n_2} = \hbar \left(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2 + 1 \right) \qquad (27)$$

dove gli auto stati sono

$$|n_1 n_2\rangle = |n_1\rangle |n_2\rangle \qquad (28)$$

$$H_i |n_i\rangle = E_i |n_i\rangle \qquad (29)$$

$$H_i = \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_i^2 x_i^2 \tag{30}$$

La perturbazione al primo ordine è

$$E^{(1)}_{n_1 n_2} = \lambda \langle n_1 | \langle n_2 | \; x_1 x_2 \, | n_1 \rangle | n_2 \rangle \\ = 0 \tag{31}$$

Al secondo ordine abbiamo

$$E^{(2)}_{n_1 n_2} = \lambda^2 \sum_{m_1 \neq n_1 \; m_2 \neq n_2} \frac{|\langle n_1 | \langle n_2 | \; x_1 x_2 \, | m_1 \rangle | m_2 \rangle|^2}{E_{n_1 n_2} - E_{m_1 m_2}}$$

$$= \frac{\lambda^2 \hbar^2}{4 m^2} \frac{1}{\omega_1 \omega_2} \left(\frac{|\langle n_1 | \langle n_2 | \, x_1 x_2 | n_1 + 1 \rangle | n_2 + 1 \rangle|^2}{- \hbar (\omega_2 + \omega_1)} + \right.$$

$$+ \frac{|\langle n_1 | \langle n_2 | \, x_1 x_2 | n_1 + 1 \rangle | n_2 - 1 \rangle|^2}{+ \hbar (\omega_2 - \omega_1)} + \frac{|\langle n_1 | \langle n_2 | x_1 x_2 | n_1 - 1 \rangle | n_2 + 1 \rangle|^2}{\hbar (\omega_1 - \omega_2)}$$

$$\left. + \frac{|\langle n_1 | \langle n_2 | \, x_1 x_2 | n_1 - 1 \rangle | n_2 - 1 \rangle|^2}{\hbar (\omega_1 + \omega_2)} \right) =$$

$$= \frac{\lambda^2 \hbar}{4 m^2} \frac{1}{\omega_1 \omega_2} \left(- \frac{(n_1 + 1)(n_2 + 1)}{\omega_1 + \omega_2} + \frac{n_1 n_2}{\omega_1 + \omega_2} + \frac{(n_1 + 1) n_2}{\omega_2 - \omega_1} \right.$$

$$\left. + \frac{n_1 (n_2 + 1)}{\omega_1 - \omega_2} \right) =$$

$$= \frac{\lambda^2 \hbar}{4 m^2} \frac{1}{\omega_1 \omega_2} \left(\frac{- (n_1 + n_2 + 1)}{\omega_1 + \omega_2} + \frac{n_1 - n_2}{\omega_1 - \omega_2} \right) =$$

$$= \frac{\lambda^2 \hbar}{4 m^2} \frac{1}{\omega_1 \omega_2 (\omega_1^2 - \omega_2^2)} \left[2 (n_1 \omega_2 - n_2 \omega_1) - (\omega_1 - \omega_2) \right] \tag{32}$$

5) Nel caso $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ la hamiltoniana imperturbata ha spettro

$$E_{n_1 n_2} = \hbar\omega\,(n_1 + n_2 + 1) \tag{33}$$

Questo spettro è degenere, in quanto l'N-esimo livello è

$$E_N = \hbar\omega(N+1) \tag{34}$$

dove

$$N = n_1 + n_2 \tag{35}$$

e tutti gli stati $|n_1\rangle|n_2\rangle$ tali che $n_1 + n_2 = N$ fisso sono degeneri. Per dato N, vi sono quindi $N+1$ stati degeneri ossia $|0\rangle|N\rangle$, $|1\rangle|N-1\rangle, \dots, |N\rangle|0\rangle$.

In questo caso la perturbazione rimuove la degenerazione: infatti abbiamo visto alla domanda (2) che se $\omega_1 = \omega_2$, $\omega_1' \neq \omega_2'$.

Quindi occorre determinare gli elementi di matrice della pert. nel sottospazio di stati degeneri.

Il primo livello eccitato è $|1\rangle|0\rangle$, $|0\rangle|1\rangle$, doppiamente degenere. La perturbazione al primo ordine è data dagli autovalori della matrice

$$\begin{pmatrix}\langle 1|\langle 0| & \langle 0|\langle 1|\end{pmatrix} (\lambda x_1 x_2) \begin{pmatrix}|1\rangle|0\rangle \\ |0\rangle|1\rangle\end{pmatrix} =$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} 0 & \langle 1|x_1|0\rangle\langle 0|x_2|1\rangle \\ \langle 0|x_1|1\rangle\langle 1|x_2|0\rangle & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \frac{\hbar}{2m\omega} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{36}$$

Gli autovalori della matrice sono

$$E^{(1)\,I}_{N=1} = \pm \frac{\lambda \hbar}{2m\omega} \qquad (37)$$

e gli autovettori sono

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle|1\rangle \pm |1\rangle|0\rangle\right) \qquad (38)$$

Pertanto per effetto della perturbazione il primo livello eccitato si separa nei due stati $|\pm\rangle$ eq. (38), con energia data al primo ordine da

$$E^{\pm} = 2\hbar\omega \pm \frac{\hbar\lambda}{2m\omega} \qquad (39)$$

6) Lo spettro esatto è dato da

$$E_{n_1 n_2} = \hbar\left(n_1\Omega_1 + n_2\Omega_2 + 1\right) \qquad (40)$$

con

$$\Omega_1^2 = \omega_1^2\cos^2\phi + \omega_2^2\sin^2\phi - \frac{\lambda}{m}\sin 2\phi$$
$$\Omega_2^2 = \omega_1^2\sin^2\phi + \omega_2^2\cos^2\phi + \frac{\lambda}{m}\sin 2\phi \qquad (41)$$

La eq. (17) implica che, al primo ordine in λ

$$\phi = -\frac{\lambda}{m(\omega_1^2-\omega_2^2)} + O(\lambda^2) \qquad (42)$$

Inoltre possiamo sviluppare $\sin\phi = \phi + O(\phi^3)$; $\cos\phi = 1 - \frac{1}{2}\phi^2 + O(\phi^4)$

Pertanto $\sin^2\phi = \phi^2 + O(\phi^2)$; $\cos^2\phi = 1-\phi^2+O(\phi^3)$

e quindi

$$\Omega_1^2 = \omega_1^2\left(1-\frac{\lambda^2}{m^2(\omega_1^2-\omega_2^2)^2}\right) + \omega_2^2\frac{\lambda^2}{m^2(\omega_1^2-\omega_2^2)^2} + \frac{\lambda^2}{m^2}\frac{2}{\omega_1^2-\omega_2^2}$$

$$= \omega_1^2 + \frac{\lambda^2}{m^2} \frac{1}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2} \left(-\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2(\omega_1^2 - \omega_2^2) \right)$$

$$= \omega_1^2 + \frac{\lambda^2}{m^2 (\omega_1^2 - \omega_2^2)} \tag{43}$$

$$\Omega_2^2 = \omega_2^2 + \frac{\lambda^2}{m^2 (\omega_2^2 - \omega_1^2)} \tag{44}$$

Pertanto

$$\Omega_1 = \sqrt{\omega_1^2 \left(1 + \frac{\lambda^2}{\omega_1^2 m^2} \frac{1}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)} \right)} = \omega_1 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{\omega_1^2 m^2} \frac{1}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)} + O(\lambda^3) \right)$$

$$\Omega_2 = \omega_2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{\omega_2^2 m^2} \frac{1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \right) + O(\lambda^3) \tag{45}$$

e la perturbazione inizia all'ordine λ^2 dove è data da

$$E^{(1)}_{n_1 n_2} = \frac{\hbar \lambda^2}{2 m^2 (\omega_1^2 - \omega_2^2)} \left[\frac{1}{\omega_1} \left(n_1 + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{\omega_2} \left(n_2 + \frac{1}{2} \right) \right]$$

$$= \frac{\hbar \lambda^2}{2 m^2 \omega_1 \omega_2 (\omega_1^2 - \omega_2^2)} \left[\left(n_1 + \frac{1}{2} \right) \omega_2 - \left(n_2 + \frac{1}{2} \right) \omega_1 \right] \tag{46}$$

in accordo con il risultato perturbativo eq. (32).