Meccanica Quantistica - 17-6-09

Traccia di soluzione

1) Gli op. impulso nella base delle coordinate sono i generatori delle traslazioni. Si ha quindi

$$p_1 \to -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_1} = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x'_1}\frac{\partial x'_1}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x'_2}\frac{\partial x'_2}{\partial x_1}\right)$$

$$= -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x'_1} + \frac{\partial}{\partial x'_2}\right) \qquad (1)$$

da cui

$$p_1 = p'_1 + p'_2 \qquad (2)$$

e

$$p_2 \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_2} = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x'_1} - \frac{\partial}{\partial x'_2}\right) \qquad (3)$$

da cui

$$p_2 = p'_1 - p'_2 \qquad (4)$$

Pertanto $\quad p'_1 = \frac{1}{2}(p_1 + p_2) \;;\; p'_2 = \frac{1}{2}(p_1 - p_2)$

Per costruzione,

$$[p'_i, x'_j] = -i\hbar\,\delta_{ij} \qquad (5)$$

Verifica esplicita

$$[p'_1, x'_1] = \frac{1}{2}[p_1 + p_2, x_1 + x_2] = \frac{[p_1, x_1) + [p_2, x_2]}{2}$$

$$= -i\hbar \qquad (6)$$

$$[p'_1, x'_2] = \frac{1}{2}[p_1 + p_2, x_1 - x_2] = 0 \qquad (7)$$

$$[p'_2, x'_2] = \frac{1}{2}[p_1 - p_2, x_1 + x_2] = 0 \qquad (8)$$

$$[p_2', x_2'] = \frac{1}{2}[p_1 - p_2, x_1 - x_2] = -i\hbar \qquad (9)$$

2) Si ha, nelle nuove coordinate

$$H = \frac{p_1'^2}{m} + \frac{p_2'^2}{m} + \frac{1}{2} m \left(\frac{1}{2}(\omega_1^2 - \omega_2^2) x_1'^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) x_2'^2 \right) \qquad (10)$$

$$= H_1 + H_2 \qquad (11)$$

dove H_1, H_2 sono due oscillatori armonici (disaccoppiati)

$$H_1 = \frac{1}{2m_1'} p_1'^2 + \frac{1}{2} m_1' \omega_1'^2 x_1'^2 \qquad (12)$$

$$H_2 = \frac{1}{2m_2'} p_2'^2 + \frac{1}{2} m_2' \omega_2'^2 x_2'^2 \qquad (13)$$

con

$$m_1' = m_2' = \frac{m}{2} \qquad (14)$$

$$\omega_1'^2 = (\omega_1^2 - \omega_2^2) \qquad (15)$$

$$\omega_2'^2 = (\omega_1^2 + \omega_2^2) \qquad (16)$$

Lo spettro di H è pertanto

$$H |n_1 n_2\rangle = (E_{n_1} + E_{n_2}) |n_1 n_2\rangle \qquad (17)$$

con

$$H_i |n_i\rangle = E_i |n_i\rangle \qquad (18)$$

e $$E_i = \hbar\omega_i'\left(n_i + \frac{1}{2}\right) \qquad (19)$$

3) Quando $\omega_1 = \omega_2$ H_1 diventa una hamiltoniana di particella libera

$$H_1 = \frac{p_1'^2}{2m_1} \qquad (20)$$

Lo stato fondamentale e' il prodotto dello stato fondamentale dell'hamiltoniana di oscillatore armonico H_2, ossia, nella base delle coordinate

$$\psi_0(x_2') = \langle x_2' | 0 \rangle = \left(\frac{m_2'\omega_2'}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp -\frac{1}{2\hbar} m_2'\omega_2' x_2'^2 \qquad (21)$$

con $$\omega_2'^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \qquad (22)$$

quando $$\omega_1' = \omega_2' = \omega,$$

e alte lo stato fondamentale di una particella libera, ossia lo stato con $p_1' = E_1' = 0$

$$\psi_0(x_1') \quad \langle x_1' | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \lim_{p_1' \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \frac{i}{\hbar} p_1' x_1' \qquad (23)$$

Si ha quindi

$$\langle x_1 x_2 | 0 0 \rangle = \psi_0(x_1')\psi_0(x_2') = \langle x_2' | 0 \rangle \langle x_1' | 0 \rangle \qquad (24)$$

La funzione d'onda $\langle x_2'|0\rangle$ è normalizzabile in senso proprio, ossia

$$\langle 0|x_2'\rangle\langle x_2'|0\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx_2' \, |\psi_0(x_2')|^2 = 1 . \qquad (25)$$

Invece la funzione d'onda $\langle x_1'|0\rangle$ corrisponde ad uno stato non legato, ed è pertanto normalizzabile in modo improprio:

$$\langle 0|x_1'\rangle\langle x_1'|p\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1' \, \psi_0^*(x_1') \, \psi_p(x_1') = \delta(p) \qquad (26)$$

4) Lo spettro di H_t è dato da

$$H_t|n_1 n_2 s\rangle = (E_{n_1} + E_{n_2} + E_s)|n_1 n_2 s\rangle \qquad (27)$$

dove

$$|n_1 n_2 s\rangle = |n_1 n_2\rangle|s\rangle, \qquad (28)$$

le autofunzioni $|n_1 n_2\rangle$ ed autovalori $(E_{n_1} + E_{n_2})$ di H sono dati nelle eq. (17-19) e lo spettro di

$$H_s|s\rangle = E_s|s\rangle \qquad (29)$$

si può determinare come segue.

Sia

$$\bar{S}_{tot} = (\bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3) \qquad (30)$$

Si ha

$$\bar{S}_{tot}^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + 2(\bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2 + \bar{S}_1 \cdot \bar{S}_3 + \bar{S}_2 \cdot \bar{S}_3) \qquad (31)$$

Pertanto

$$H_s = \frac{-(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) + S_{tot}^2}{2} \qquad (32)$$

Gli autovalori di S_T^2 si possono determinare come segue
Combiniamo prima i due spin $\bar s_1$ ed $\bar s_2$. Gli autostati di

$$s_{12}^2 = (\bar S_1 + \bar S_2)^2 \qquad (33)$$

sono (a) $s_1 = s_2 = 1/2$

$$s_{12}^2 |1\rangle = \hbar^2 2 |1\rangle \quad \text{3 volte deg.} \qquad (34)$$

$$s_{12}^2 |0\rangle = 0 \quad \text{non deg}$$

totale 4 stati.

(b) $s_1 = s_2 = 1$

$$s_{12}^2 |2\rangle = \hbar^2 6 |2\rangle \quad \text{5 volte deg}$$

$$s_{12}^2 |1\rangle = \hbar^2 2 |1\rangle \quad \text{3 volte deg} \qquad (35)$$

$$s_{12}^2 |0\rangle = 0 \quad \text{non deg}$$

totale 9 stati

Combinando quindi

$$S_T^2 = (S_{12} + S_3)^2 \qquad (36)$$

si ~~At~~ ha

(a) $\frac{1}{2} \oplus 1$ $\quad S_T^2 |\frac{3}{2}\rangle = \hbar^2 \frac{15}{4} |\frac{3}{2}\rangle$ 4 volte deg

$S_T^2 |\frac{1}{2}\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2 |\frac{1}{2}\rangle$ 2 volte deg (37)

$0 \oplus \frac{1}{2}$ $\quad S_T^2 |\frac{1}{2}\rangle = \cancel{\hbar^2} \frac{3}{4}\hbar^2 |\frac{1}{2}\rangle$ 2 volte deg

totale 8 stati $= 4 \times 2/5$

(b)

$$\frac{1}{2}+2 \left\{ \begin{array}{ll} S_{12}^2 \,|\tfrac{5}{2}\rangle = \hbar^2 \tfrac{35}{4} \,|\tfrac{5}{2}\rangle & \text{6 volte deg} \\ S_{12}^2 \,|3/2\rangle = \hbar^2\, 15/4 \,|3/2\rangle & \text{4 volte deg} \end{array} \right.$$

$$\frac{1}{2}+1 \left\{ \begin{array}{ll} S_{12}^2 \,|\tfrac{3}{2}\rangle = \hbar^2 \tfrac{15}{4} \,|\tfrac{3}{2}\rangle & \text{4 volte deg} \\ S_{12}^2 \,|1/2\rangle = \hbar^2 \tfrac{3}{4} \,|\tfrac{1}{2}\rangle & \text{2 volte deg} \end{array} \right. \qquad (38)$$

$$\frac{1}{2}+0 \quad S_{12}^2 \,|\tfrac{1}{2}\rangle = \hbar^2 \tfrac{3}{4} \,|\tfrac{1}{2}\rangle \qquad \text{2 volte deg}$$

totale 18 stati = 9 × 2

Abbiamo infine

$$\text{(a)} \qquad E_S = \frac{1}{2}\left(S_t^2 - 9/4\right)$$

$$\text{(b)} \qquad E_S = \frac{1}{2}\left(S_t^2 - \frac{19}{4}\right) \qquad (39)$$

dove i valori di S_t^2 nei due casi sono gli autovalori eq. (38÷39)

5) Se le due particelle sono identiche, la f. d'onda deve essere simmetrica o antisimmetrica sotto lo scambio di $(x_1 s_1)$ $(x_2 s_2)$, e quindi

(a) (x_1, x_2) simm $\quad (s_1 s_2)$ antisim $\quad$ e viceversa

(b) $(x_1\, x_2)$ simm $\quad (s_1 s_2)$ simm $\quad$ e viceversa. $\qquad$ (40)

Ora notiamo che sotto lo scambio $x_1 \leftrightarrow x_2$, $x_2' \to -x_2'$ mentre x_1' resta invariato. Perciò

$$\psi(x_1, x_2) = \pm\, \psi(x_2, x_1) \Longleftrightarrow \psi(x_2') = \pm\, \psi(-x_2') \qquad (41)$$

Lo spettro é quindi dato da

(a) n_2' pari / n_2' dispari, non deg:

$\longrightarrow s_{12} = 0 \rightarrow s_T = \frac{1}{2}$ 2 volte deg

$\longrightarrow s_{12} = 1 \rightarrow s_T = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ 2 o 4 volte deg (42)

(b) n_2' pari / n_2' dispari, non deg:

$\longrightarrow s_{12} = 2 \rightarrow s_T = \frac{5}{2}, \frac{3}{2}$ 6 o 4 volte deg

$s_{12} = 0 \rightarrow s_T = \frac{1}{2}$ 2 volte deg (43)

$\longrightarrow s_{12} = 1 \rightarrow s_T = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$ 4 o 2 volte deg.

dove abbiamo indicato con s_{12}, s_T risp.

$$S_T^2 \, |s_T\rangle = \hbar^2 s_T(s_T+1) \, |s_T\rangle \qquad (44)$$

$$S_{12}^2 \, |s_{12}\rangle = \hbar^2 s_{12}(s_{12}+1) \, |s_{12}\rangle$$

6) La perturbazione agisce solo su H_2':

$$H_p(t) = -E \, x_2' \, e^{-bt} \qquad (45)$$

Ponendo

$$x_2' = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(a_2' + a_2'^{+} \right) \qquad (46)$$

$$a_2'^{+} |0_2\rangle = |1_2\rangle$$

si vede che la perturbazione data, agendo sullo stato fondamentale, può produrre esclusivamente transizioni allo stato $|1\rangle$ (primo stato eccitato).

La prob. di transizione al primo ordine è data da

$$P_{0\to 1} = |A_{0\to 1}|^2 \qquad (47)$$

con

$$A_{0\to 1} = \frac{1}{i\hbar}\int_0^{\infty} dt\,(-E)\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\; e^{-bt}\; e^{i\omega t}$$

$$= \frac{(-E)}{i\hbar}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\;\frac{1}{b-i\omega} \qquad (48)$$

dove abbiamo fatto uso della formula in rapp. di interazione

$$A_{n\to m} = \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t_1} dt'\, e^{\frac{1}{i\hbar}(E_m - E_n)t} \langle m | H_p(t') | n\rangle \qquad (49)$$

Abbiamo così

$$P_{0\to 1} = \frac{1}{(b^2+\omega^2)}\,\frac{E^2}{2\hbar m\omega} \qquad (50)$$