

Traccia di soluzione

21-6-2011

1) Introducendo le coordinate relative e del baricentro

$$\bar{r} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \quad (1)$$

$$\bar{R} = \frac{m_1 \bar{x}_1 + m_2 \bar{x}_2}{M} \quad (2)$$

i momenti ad essi coniugati sono

$$\bar{P} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 \quad (3)$$

$$\bar{P}_1 = \frac{m_2 \bar{P}_1 - m_1 \bar{P}_2}{M} \quad (4)$$

e si ha

$$H = H_B + H_R \quad (5)$$

con

$$H_B = \frac{\bar{P}^2}{2M} \quad (6)$$

$$H_R = \frac{P^2}{2\mu} - \frac{e^2}{|\bar{r}|} + \lambda \bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2 \quad (7)$$

dove

$$M = m_1 + m_2 \quad (8)$$

e

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad (9)$$

definiscono rispettivamente la massa totale e la massa ridotta.

L'hamiltoniana del bicentro è una hamiltoniana di particella libera e d'ora in poi verrà trascurata; in ogni caso essa ha spettro continuo

$$E_B = \frac{k_B^2}{2M} \quad (10)$$

con stato fondamentale $E_B^{(0)} = 0$ caratterizzato dalla funzione d'onda $\psi_B^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ (11)

La funzione d'onda totale è

$$\Psi(\vec{R}, \vec{r}) = \Psi_B(R) \psi_0(\vec{r}) \quad (12)$$

D'ora in poi si considererà esclusivamente la $\psi_0(\vec{r})$.

2) la funzione d'onda del sistema è data da

$$\Psi = \psi_0(\vec{r}) \chi(s_1, s_2) \quad (13)$$

dove

$$\psi_0(r) = \frac{(e^2 \mu)^{3/2}}{\sqrt{\pi} \hbar^3} e^{-\frac{e^2 \mu r}{\hbar^2}} \quad (14)$$

è la funzione d'onda dello stato fondamentale

dell'atomo di idrogeno e $\chi(s_1, s_2)$ è una funzione d'onda di spin, ad esempio

$$\chi(s_1, s_2) = \mu \uparrow^{(1)} \mu \downarrow^{(2)} \quad (15)$$

La densità di probabilità di posizione è

$$P(r, \theta, \varphi) d^3x = |\psi(r, \theta, \varphi)|^2 r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \quad (16)$$

Notiamo che visto che \vec{x} è una coordinata relativa, la distanza tra le due particelle è r .

La densità di probabilità radiale è quindi

$$g(r) = N^2 r^2 e^{-2r/a_0} \quad (16)$$

dove

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{\mu e^2} \quad (17)$$

è il raggio di Bohr e N è una normalizzazione.

Il massimo è quando

$$0 = \frac{dg}{dr} = \left(\frac{2}{r} - \frac{2}{a_0} \right) g(r) \quad (18)$$

cioè

$$r = a_0$$

$$(19)$$

3) Gli autostati dell'hamiltoniana H_R si determinano ponendo

$$H_R = H_0 + H_S \quad (20)$$

dove H_0 è l'hamiltoniana dell'atomo di idrogeno e

$$H_S = \lambda \bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2 \quad (21)$$

Gli autostati di H_0 sono noti e la b. d'onda del punto precedente ne è lo stato fondamentale.

Gli autostati di H_S si determinano notando che

$$H_S = \lambda \left(\frac{S^2 - S_1^2 - S_2^2}{2} \right) \quad (22)$$

dove $\bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2$
 lo spettro di H_S è quindi

$$E_S = \frac{\lambda}{2} \hbar^2 \left(S(S+1) - (S_1(S_1+1) + S_2(S_2+1)) \right) \quad (24)$$

dove $S_1 = S_2 = 1/2$ ed S può prendere i valori

$$S = 0, 1 \quad (25)$$

Gli autostati di H_S sono pertanto i due autostati

della spin totale. Visto che si suppone che le due particelle abbiano spin opposto, gli stati autostati dello spin totale di cui lo stato dato può essere sovrapposizione sono

$$\begin{aligned} |10\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \\ |00\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \end{aligned} \quad (26)$$

Si ha pertanto che

$$\psi = \psi_0 \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle \pm |00\rangle) \quad (27)$$

dove il segno \pm corrisponde al caso in cui lo spin della prima particella è rivolta all'insieme (all'ingiù)

*) La funzione d'onda al tempo t è

$$\psi(t) = e^{i\frac{H}{\hbar}t} |\psi\rangle =$$

$$= e^{i\frac{E_0 t}{\hbar}} |\psi_0\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{i\frac{E_+ t}{\hbar}} |10\rangle + e^{i\frac{E_- t}{\hbar}} |00\rangle \right) \quad (28)$$

dove $E_0 = -\frac{\mu e^2}{8\hbar^2}$ (29)

è l'energia dello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno (5)

ed

$$E_t = \frac{\lambda}{2} \hbar^2 (2 - 3/2) = \frac{\hbar^2 \lambda}{4} \quad (26)$$

e

$$E_s = \frac{\lambda}{2} \hbar^2 (-3/2) = -\frac{3}{4} \hbar^2 \lambda \quad (27)$$

sono rispettivamente gli autovalori di H_s corrispondenti agli stati di spin totale $s=1$ (tripletto) e $s=0$ (singoletto).

Si ha quindi

$$\psi(t) = \frac{e^{\frac{E_0 t}{\hbar}}}{\sqrt{2}} e^{\frac{E_s t}{\hbar}} \left(e^{\frac{\lambda \hbar^2 t}{i\hbar}} |10\rangle \pm |00\rangle \right) \quad (28)$$

5) La f. d'onda Eq. (28) si può scrivere come

$$\psi(t) = \frac{e^{E_0 t / i\hbar}}{\sqrt{2}} e^{E_s t / i\hbar} \left(e^{\frac{\lambda \hbar^2 t}{i\hbar}} \left(\frac{|1\downarrow\rangle + |0\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \pm \frac{|1\downarrow\rangle - |0\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \right) \right) \quad (29)$$

Supponiamo che al tempo $t=0$ il sistema sia nello stato $|1\downarrow\rangle$ (caso col segno +).

Si ha

$$P_{\uparrow}(t) = |\langle \uparrow \downarrow | \psi \rangle|^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \left| \left(e^{\frac{\lambda \hbar^2 t}{i \hbar}} + 1 \right) \right|^2 =$$

$$= \left| e^{\frac{\lambda \hbar t}{2i}} \left(\frac{e^{\frac{\lambda \hbar t}{i/2}} + e^{-\frac{\lambda \hbar t}{i/2}}}{2} \right) \right|^2$$

$$= \cos^2 \frac{\lambda \hbar t}{2} \quad (30)$$

(se si fosse posto il sistema nello stato $|\downarrow \uparrow\rangle$ a $t=0$ si sarebbe trovato \sin^2 anziché \cos^2).

o) Al primo ordine, si ha

$$\Delta E = \langle \psi | \bar{B} \cdot \bar{\mu} | \psi \rangle \quad (31)$$

Scegliamo tutto noto che nello stato dato

$$\langle \psi | \bar{B} \cdot \bar{\mu} | \psi \rangle = \langle \chi | \mu_1 \bar{S}_1 \cdot \bar{B} + \mu_2 \bar{S}_2 \cdot \bar{B} | \chi \rangle \quad (32)$$

dove χ è la f.d'onda di spin, in quanto lo stato fondamentale dell'atomo di idrogeno ha momento angolare orbitale nullo. Abbiamo inoltre che

$$\Delta E = \frac{1}{2} \left(\langle \uparrow \downarrow | \pm \langle \downarrow \uparrow | \right) \mu_1 \bar{S}_1 \cdot \bar{B} \mp \mu_2 \bar{S}_2 \cdot \bar{B} \left(| \uparrow \downarrow \rangle \pm | \downarrow \uparrow \rangle \right) \quad (33)$$

dove il segno $+ (-)$ si riferisce allo stato di tripletta (singoletto).

Ne segue che

$$\Delta E = \frac{1}{2} \left(\langle \uparrow \downarrow | \mu_1 \bar{S}_1 \cdot \bar{B} + \mu_2 \bar{S}_2 \cdot \bar{B} | \uparrow \downarrow \rangle + \langle \downarrow \uparrow | \mu_1 (\bar{S}_1 \cdot \bar{B} + \mu_2 \bar{S}_2 \cdot \bar{B}) | \uparrow \downarrow \rangle \right) \quad (34)$$

$$\text{Inoltre } \langle \uparrow \downarrow | \bar{S}_1 | \uparrow \downarrow \rangle =$$

$$= \langle \uparrow | \bar{S}_1 | \uparrow \rangle \langle \downarrow | \downarrow \rangle =$$

$$= \langle \uparrow | S_x | \uparrow \rangle$$

$$\text{e } \langle \uparrow \downarrow | \bar{S}_1 | \downarrow \uparrow \rangle =$$

$$= \langle \uparrow | S_x | \downarrow \rangle \langle \downarrow | \uparrow \rangle = 0 \quad (35)$$

Pertanto, scegliendo l'asse \hat{z} lungo \uparrow e ricordando che

$$\langle \uparrow | \sigma_x | \uparrow \rangle = \langle \uparrow | \sigma_z | \uparrow \rangle = \langle \downarrow | \sigma_x | \downarrow \rangle = \langle \downarrow | \sigma_z | \downarrow \rangle = 0 \quad (36)$$

$$\text{e } \langle \uparrow | \sigma_y | \uparrow \rangle = \frac{\hbar}{2}$$

$$\langle \downarrow | \sigma_y | \downarrow \rangle = -\frac{\hbar}{2} \quad (37)$$

si ha

$$\Delta E = \frac{1}{2} \left(B_z (\mu_1 - \mu_2) - B_z (\mu_1 - \mu_2) \right) = 0 \quad (38)$$

7) La perturbazione data è la combinazione lineare di un termine che dipende solo da \bar{S}_1 ed un termine che dipende solo da \bar{S}_2 . Ma l'elemento di matrice della perturbazione è dato da

$$\Delta E = T_2 \rho \left(\bar{S}_1 \cdot B \mu_1 + \bar{S}_2 \cdot \bar{B} \mu_2 \right) \quad (39)$$

$$= T_2 \rho_1 \bar{S}_1 \cdot B \mu_1 + T_2 \rho_2 \bar{S}_2 \cdot \bar{B} \mu_2$$

dove ρ_i è la matrice densità del sottosistema della i -esima particella quando sull'altra particella non viene eseguita alcuna misura. Per ^{entrambi} parti che stati dati:

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{1}{2} \mathbb{1}, \quad (40)$$

che è la matrice densità di uno stato non-polarizzato. Pertanto, l'elemento di matrice dello spin è eguale a zero in entrambi gli stati; come si è trovato con il calcolo esplicito